MATHEMATICA.

In hac *Leonh. Eulerus* V. Cel. vtramque facit paginam. Differtationem ordo et confpectus hic eft.:

I.

De Numeris, qui funt aggregata duorum quadratorum. p. 3.

Non fruftra eft, quod veteres Mathematici, vti ex fcripti *Euclidis* ac *Diophanti* liquet, fummo ftudio numerorum indolem fcrutati, proprietatibus eorum haud mediocr ter delectati funt. Praeterito etiam faeculo primi ordinis Geometrae plurimum ftudii in exploranda numerorum natura confumferunt, inter quos *Fermatius*, Senator Tolofanus, ita eminuit, vt eius fagacitatem etiam nunc nemo fit affecutus. Mos tunc inualuerat, veritates, quas quisque inueftigaffet, nude potius ad caeterorum ingenia exercenda, proponere, quam demonftrationes, docendi caufa, indicare, quo factum eft, vt fublimes *Fermatii* meditationes in hoc genere adhuc hodie magis miremur, quam cognofcamus, propterea quod poft eius obitum fcripta, quibus earum demonftrationes continebantur, temporis iniuria maximo huius fcientiae damno interierunt. Praeftantiffimus itaque auctor huius differtationis haud inutiliter operam fuam collocare cenfendus eft, dum huiusmodi deperditas demonftrationes Fermatianas reftaurare conatur, etiamfi noftro quidem aeuo hoc ftudium, quod in numerorum natura inuestiganda consumitur, plane derelictum, atque adeo a plerisque spretum, videatur. Quanquam enim hoc quidem tempore Mathematici in cultura Analyseos sublimioris et partibus Matheseos applicatae, quae veteribus inaccessae fuerunt, potissimum elaborare solent, nulla tamen veritas prorsus sterilis et omni vsu destituta videtur. Quin potius numerorum proprietates plerumque multo maiorem sagacitatem et ingenii vim postulant, quod vel ex eo colligere licet, quod in reliquis Matheseos partibus vix vlla cognoscatur veritas, cuius demonstratio non ante iam fuerit perspecta, cum contra plurimae habeantur numerorum proprietates, quarum veritatem adhuc sine demonstratione admittere cogimur, auctoritate potissimum *Fermatii* inducti, qui se eas demonstrasse palam est professus. Ad hoc genus referendae sunt plures insignes proprietates numerorum, qui sunt binorum quadratorum aggregata, quarum demonstrationes Cel. Auctor in hac dissertatione proponit. De his numeris, si quidem bina quadrata eos componentia fuerint inter se prima, seu communem diuisorem non admittant, id prorsus est singulare, quod alios diuisores non agnoscant, nisi qui ipsi eiusdem sint indolis, binorum scilicet quadratorum summae; cuius rei demonstratio haud parum ardua hic suppeditatur. Deinde cum omnes huius generis numeri, si fuerint primi, vnitate minuti per quaternarium sint diuisibiles, siue in hac forma $4n+1$ contineantur, memorabile est, vicissim omnes numeros primos huius formae $4n+1$ simul esse summas duorum quadratorum, cuius demonstrationis autem se

nondum

nondum compotem esse factum Cel. auctor ingenue fatetur, etiamsi eius veritatem extra dubium collocauerit; in quo insigne conspicitur specimen, etiam in mathematicis eiusmodi dari veritates, quas sine perfecta demonstratione credere cogimur. In sequenti volumine Commentariorum nostrorum plena eiusdem demonstratio apparebit, qua omnia, quae hinc deriuantur, penitus confirmabuntur. Hic ex ista proprietate egregiam deduxit methodum, eamque satis facilem, explorandi, vtrum numerus huius formae $4\ n + 1$, quantumuis fuerit magnus, primus sit, nec ne? Totum negotium huc redit, vt exploretur, vtrum talis numerus propositus in summam duorum quadratorum resolui queat, an minus? vbi tres casus sunt perpendendi. Primo, si numerus propositus nullo prorsus modo in duo quadrata sit resolubilis, certum est, eum non esse primum, sed duos ad minimum factores habere formae $4\ m - 1$; secundo, si vnico modo in duo quadrata fuerit resolubilis, eaque sint prima inter se, hoc certum est indicium numerum propositum esse primum; tertio, si is plus vno modo in duo quadrata discerpi queat, necessario erit compositus, eiusque diuisores inde assignari possunt. Vulgo autem iudicium, vtrum numerus propositus sit primus, nec ne? haud parum molestiae creare solet, si is centena millia superet. Ad hunc enim terminum vsque habentur tabulae numerorum primorum passim obuiae, atque adeo finicis characteribus exaratae. Pro maioribus autem numeris adhuc alia via non patuit, nisi vt diuisio per omnes numeros primos vsque ad radicem quadratam numeri propositi

tentetur.

tentetur. Nunc autem, dum numerus propositus in forma $4n+1$ contineatur, totum negotium multo minore labore absoluitur, cuius plura ad calcem huius tractationis extant specimina, quod eo magis notatu dignum videtur, quod nulla operatio per diuisores instituatur.

II.

De constructione aptissima molarum alatarum p. 41.

Nonsolum inter artifices, sed etiam Geometras, quaestio iam pridem est agitata, quemadmodum alas in machinis, quae vi venti impelluntur, instrui oporteat, vt maximus inde effectus obtineatur. Geometris quidem haec quaestio haud difficilis est, postquam inuenerunt, ad alas circumagendas a vento maximam vim exeri, si earum superficies ad venti directionem sub angulo $54^\circ\ 45'$ fuerit inclinata, verum in hoc negotio non totam quaestionem sunt contemplati, propterea quod iste angulus tum solum maximam impulsionem producit, quamdiu machina adhuc est in quiete. Simulac vero machina iam in motu versatur, vti principia, quibus haec inuestigatio innitebatur, non amplius locum habent, ita etiam illi angulo nulla praerogatiua relinquitur. Quare cum effectus huiusmodi machinarum non in quiete, sed in motu sit constitutus, angulus ille nihil quicquam ad earum perfectionem confert; atque adeo experientia compertum est, angulum multo maiorem feliciori successu in hoc machi-

machinarum genere adhiberi. Qui hinc ansam sumserunt Theoriam arguendi, quod saepe praxi aduersetur, statum quaestionis perperam intellexerunt, cum angulus ille 54°. 45′ per Theoriam inuentus praxi vtique inseruiat, si modo circumstantiae cum iis, quae in Theoria sunt positae, conueniant; quis autem consensum postulet, si in Theoria ad alias conditiones, atque in praxi, respiciamus?

In hac dissertatione Cel. Eulerus luculenter ostendit, si alae in motu versentur, maiorem angulum inclinationis statui oportere, vt a vento maxima vis excipiatur, atque adeo pro quouis celeritatis gradu circa extremitates alarum inclinationem magis ad angulum rectum accedere debere, quam circa axem. Quod cum etiam ab aliis sit obseruatum, Auctor hic monet, ne hac quidem correctione adhibita, Theoriam perfecte cum praxi conciliari. Neque enim, dum maximum effectum intendimus, id postulamus, vt quouis momento vis alas circumagens sit maxima; sed simul ad celeritatem, qua ea vis agit, est respiciendum: propterea quod fieri potest, vt minor vis celerius agens maiorem effectum producat, quam vis maior tardius agens. Cum igitur quaestio non ad quantitatem vis impellentis, sed potius ad quantitatem effectus sit reuocanda, huius mensuram ante rite stabiliri oportet, quam enodatio quaestionis suscipi queat. Omnium autem machinarum effectus tanquam eleuatio ponderis cuiusdam spectari potest, et quia effectus eo maior aestimatur, quo celerius idem pondus, vel quo maius pondus eadem celeritate attollitur, productum ex pondere in celeritatem, qua eleuatur, iustam exhibebit mensuram effectus cuiusque machinae. Iam vero hoc idem productum in omnibus machinis semper aequale est producto ex vi impellente in celeritatem, qua agit, vnde et hoc productum veram effectus, quem machina praestare valet, quantitatem suppeditat. Ex quo intelligitur, exiguam vim, dummodo satis celeriter agat, quantumuis magnum effectum producere posse. Neque hic obiectio valet, fieri forte posse, vt parua vis magno ponderi eleuando non sufficiat: notum enim est, quemadmodum quamuis machinam disponi conueniat, vt etiam a minima vi maximum onus superari queat; scilicet quo maius fuerit onus, id eo propius centro motus applicari oportet, quo eius motus tanto tardior euadat, quod vtcunque machina ex simplicibus fuerit composita, semper fieri potest. Hinc ad effectum molae alatae a priori determinandum, singula alarum elementa considerari, et vis venti ea impellens, quatenus circumactionem promouet, in celeritatem cuiusque elementi multiplicari debet, quo facto omnium horum productorum elementarium summa praebebit totum machinae effectum.

Ex hoc principio Auctor molarum alatarum effectum in genere definit, quaecunque sit alarum figura et dispositio, et quaecunque motus gyratorii celeritas, hincque deinceps methodo maximorum et minimorum cum formam alarum, tum vero potissimum motus gyratorii celeritatem inuestigat, vt effectus prodeat maximus

mus. Eidem fundamento innititur regula iam ſatis nota pro molis aquariis aliisque machinis, quae rota a flumine circumacta impelluntur, dum ita inſtrui ſolent, vt celeritas palarum ſit tertia pars celeritatis fluminis. Verum in molis alatis, vbi actio venti prorſus eſt diuerſa, praeter expectationem eiusmodi maximum elicitur, quod rationi aeque atque experientiae contrarium videtur. Docet enim calculus maximum effectum comparari, ſi ſuperficies alarum ad directionem venti plane fuerit normalis, eaeque celeritate infinita circumagantur: tum quidem vis venti impellens euaneſcit, quod tamen non obſtat, quin per celeritatem infinitam multiplicata productum finitum praebeat, quod ipſum calculus maius oſtendit, quam ſi machina aliter inſtrueretur. Verum tamen certum eſt, talem diſpoſitionem in praxi nullo modo locum habere poſſe, vnde cauſam huius diſſenſus theoriae ab vſu practico accuratius inueſtigari oportet, quae in eo poſita reperitur, quod in Theoria quaedam aſſumuntur, quae in praxi obſeruari nequeunt. Quod diſcrimen, ſi diſtincte fuerit perſpectum, deinceps non amplius erit difficile, Theoriam ita ad praxin accommodare, vt perfectus conſenſus obtineatur. Ac primo quidem notandum eſt, in Theoria nullam frictionis rationem eſſe habitam, cuius quantum ſit momentum in machina aliter inſtruenda mox videbimus. Deinde etiam, dum alae celerrime circumaguntur, craſſitie ſua inſignem ab aëre reſiſtentiam patiuntur, quae in Theoria penitus eſt neglecta. Denique in Theoria aſſumitur, motum machinae ſtatim ab initio ita ad vniformitatem componi, vt vis impellens cum

 onere

onere ſuperando in aequilibrium conſtituatur, quod autem in praxi eo tardius euenit, quo maiori opus fuerit celeritate, quae ſi adeo ſit infinita, machina ad hunc ſtatum, maximum effectum producentem, nunquam perveniet. His notatis oſtendendum, ſi hae conditiones in praxi impleri poſſent, Theoriam nihil abſurdi indicaturam, ita, vt intelligi queat, quo magis alarum inclinatio ad angulum rectum accedat, eaeque ſimul celerius circumagantur, eo maiorem effectum impetrari poſſe. Ne idea infiniti obruamur, ponamus, ſuperficiem alarum cum venti directione facere angulum 89°, easque centies ſingulis minutis ſecundis circumagi debere: vim autem totam a vento exceptam tantum ponderi vnius vnciae aequiualere, quae vero per tantam celeritatem multiplicata productum exhibeat, quod ſit = 1000, cui ſimul effectus machinae aequabitur. Ad quem obtinendum, ſi onus ſuperandum aequiualeat ponderi 10000 vnciarum, machina ita eſt diſponenda, vt vis impellens vnius vnciae cum hoc tanto onere in aequilibrio conſtituatur, quod nihil habet abſurdi. Tum machina actioni venti expoſita tandem praedictum celeritatis gradum conſequetur, atque effectum aſſignatum producet, etiamſi, antequam ad hanc celeritatem pertingat, effectus futurus ſit minor, verum hoc interuallum in calculo pro nihilo reputatur. Hinc intelligere licet, ſi angulus inclinationis adhuc propius ad 90° augeatur, quo vis impellens magis diminueretur, vlterius aucta celeritate, fieri poſſe, vt adhuc maior effectus producatur, qui adeo vsque ad 90° creſcere queat, vbi certam quantitatem, eamque maximam, ſit aſſecuturus.

In-

Interim tamen ternae rationes ante allegatae impediunt, quominus haec ad praxin transferri possint. Imprimis autem frictio est impedimento, quae etsi plerumque instar oneris considerari potest, tamen eius resistentiam non vti oneris pro lubitu diminuere licet. Cum enim oneris resistentia diminuatur, dum id propius ad centrum motus applicatur, haec diminutio in frictione locum habere nequit, quae pro structura machinae semper ad certam distantiam a centro motus manet applicata; deinde similis fere ratio est illius resistentiae aeris, a crassitie alarum oriundae. Denique etiamsi hae resistentiae non obstarent, quo minus celeritas infinita efficeret, vt machina demum tempore elapso infinito, hoc est, nunquam, eam adipisceretur, effectumque expectatum produceret. Ob has causas Cel. Auctor praecipue in hoc elaborasse videtur, vt rationem frictionis in calculum induceret, qua cognita, dispositionem machinae ita determinauit, vt superata frictione maximus effectus produceretur, in quo iam nullum amplius incommodum praxi aduersans cernitur, sed potius egregius consensus deprehenditur. Obseruat autem, frictionem tantam esse posse, vt ea sola a dato vento ne quidem superari, multo minus vllus effectus obtineri queat; vnde perspicitur, in hoc machinarum genere diminutionem frictionis maximi esse momenti, ita, vt ea parum minuta, multo maior effectus sit proditurus, qui, si frictio parumper esset maior, plane nullus esset futurus. Quare nullum est dubium, quin hinc maxima emolumenta in praxin sint redundatura.

III.

Elementa Doctrinae solidorum p. 109.

itemque

IV.

Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita p. 140.

Quanquam Stereometria inter disciplinas Matheseos elementares referri solet, plurimum tamen abest, quominus ea solide pertractata, atque, veluti Geometria plana, in systema certum redacta sit censenda. Cum enim in Geometria plana, post lineas et angulos, figurae potissimum rectilineae examinentur, earumque proprietates demonstrentur, quibus ob simplicitatem circulus adiungi solet, ita in Stereometria, iactis fundamentis de inclinatione planorum et angulis solidis, corpora hedris planis inclusa tractari, eorumque proprietates euolui conueniret, vbi imprimis haec corpora in certas classes distribui oporteret, quibus porro ob simplicitatem globus cum cylindro et cono adiungi posset. Verum in elementis stereometricis nihil prorsus de diuisione corporum in certas classes secundum hedrarum numerum reperitur: sed quaedam tantum species, veluti prismata, pyramides et corpora regularia dicta, praetermissis reliquis omnibus, sine vlla partitione et connexione mutua proferuntur. Quod autem in Geometria

metria plana facillimum erat figuras rectilineas secundum laterum numerum, quippe cui numerus angulorum semper est aequalis, in classes digerere, id in Stereometria, si tantum ad corpora hedris planis inclusa attendamus, multo magis est arduum, cum numerus hedrarum solus ad hoc non sufficiat. Si enim ambitum horum corporum spectemus, ea nonsolum hedris terminantur, sed etiam angulis solidis, et binarum hedrarum concursibus, qui a Cel. Auctore, ob defectum aptioris et recepti nominis, *acies* vocantur; quarum rerum, quae non constanti quadam lege inter se connexae videntur, in corporum classibus constituendis vtique rationem haberi decet: propterea quod in corporibus, eodem hedrarum numero contentis, ingens diuersitas, ratione angulorum solidorum et hedrarum, qua indoles eorum vehementer variatur, locum habere possit. Ita octaedrum, prisma sexangulare, et pyramis super basi heptagona extructa octo hedris includuntur, quis autem haec tam diversa corpora vna eademque classe complecti vellet? Hinc Cel. Auctor tres praecipuos characteres ad corpora in classes distinguenda constituit, qui sunt 1° numerus hedrarum, 2° numerus acierum, ac 3° numerus angulorum solidorum. Qui haec attentius perpenderit, facile agnoscet, ea ad indolem quorumuis corporum perspiciendam ita esse necessariam, vt iis neglectis elementa Stereometriae nullo modo solide ac scientifice tradi queant, vnde mirum est, neminem adhuc de hisce principiis Stereometriae constituendis cogitasse, hancque disciplinam vltra terminos Euclideos vix quidquam esse promotam, cum tamen omnes Geometrae in hoc studio plurimum fuerint occupati.

cupati. Verum euolutio memoratorum characterum multo difficilior eſt, quam primo intuitu videtur. Deprehenduntur enim, certa quadam lege inter ſe connecti, cuius ratio ita abſcondita videtur, vt Auctor eam primum ſine demonſtratione, ſoli inductioni innixus, attulerit, ac poſtmodum demum poſt plura tentamina demonſtrationis compos ſit factus, quam in ſchediaſmate ſubnexo ſeorſim expoſuit. Veritas autem haec, demonſtratu tam difficilis, in hoc conſiſtit, vt in omni corpore hedris planis incluſo aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum ſolidorum ſemper binario excedat numerum acierum, quae propoſitio analoga eſt ei, qua in Geometria plana numerus angulorum cuiusque figurae rectilineae numero laterum aequalis pronunciatur. Atque vt haec fundamentum cognitionis figurarum continet, ita illa in Stereometria prima ſolidae cognitionis principia complecti eſt putanda. Statim ergo atque in corpore trium memoratorum characterum bini fuerint cogniti, tertius inde facillime innoteſcit. Si enim numerus angulorum ſolidorum fuerit $= S$, numerus acierum $= A$, et numerus hedrarum $= H$, ſemper habetur $S + H = A + 2$, hincque vel $S = A + 2 - H$, vel $H = A + 2 - S$, vel $A = S + H - 2$, quae relationis ſimplicitas ob demonſtrationis difficultatem magis miranda videtur. Deinde cum figurarum planarum haec ſit palmaria proprietas, quod omnes anguli iunctim ſumti aequales ſint bis tot rectis, quot ſunt anguli, demtis quatuor: ita etiam circa ſolida hedris planis incluſa Auctor quaſi ſimilem proprietatem demonſtrat, quae circa angulos ſingularum hedrarum verſatur, quorum

quorum omnium ſumma ſemper aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot in corpore habentur anguli ſolidi, demtis octo. Plures alias praeterea in medium allatas conſpicimus inſignes corporum talium proprietates ex numero laterum hedrarum petitas, prout eae vel ſunt triangulae, vel quadrilaterae, vel pentagonae, etc. vnde Cel. Auctor concludit ex meris hedris hexagonis, vel plurium angulorum, nullum ſolidum conſtrui poſſe. Ex his ſtabilitis principiis fluunt tandem claſſes et genera ſolidorum, eorumque praecipuae proprietates, quae campum ampliſſimum aperiunt, hanc doctrinam vberius excolendi, ſiquidem hinc completum Stereometriae ſyſtema condi poſſet.

V.

De Motu Corporum Coeleſtium p. 161.

Quando motus cuiuspiam corporis coeleſtis dicitur ſiue regularis, ſiue irregularis, ante omnia notandum, has voces ad cognitionem noſtram ita referri, vt ſi motus ille opinioni noſtrae conſentaneus deprehendatur, regularis, contra vero irregularis iudicetur. Ita veteribus fortaſſe motus corporum coeleſtium irregulares ſunt viſi, ſtatim atque animaduerterunt, ea non in circulis ferri, ſiquidem eorum opinio ad ſolum motum circularem fuerat adſtricta. Hodie autem, poſtquam *Kepleri* ſententia de orbitis ellipticis a *Newtono* firmiſſimis argumentis mechanicis eſt munita, regulae Keplerinae ita animos no-

 ſtros

ftros occupauerunt, vt, si quae corpora coelestia secundum eas exactissime mouerentur, eorum motus a nobis maxime regularis iudicaretur, neque iam a nobis aliae irregularitates agnoscantur, nisi vbi motus ab illis regulis deuiare obseruatur. Eos scilicet motus in coelo pro regularibus habemus, qui fiunt in sectionibus conicis, ita areae circa alterum focum descriptae sint temporibus proportionales, a qua lege quidquid aberrauerit, ad irregularitates referre solemus, quae eo censentur maiores, quo maior fuerit ista aberratio. Primum quidem Planetae principales perfecte secundum hanc legem circa Solem moveri sunt visi, atque adeo *Streetius* in Tabulis Carolinis eorum Aphelia immota statuit; ex quo etiam nunc in eorum motibus alia irregularitas admitti non solet, nisi quatenus a regulis *Kepleri* discedunt. In Luna autem insignis ab his regulis aberratio est obseruata, cuius motus proinde iure ab Astronomis pro maxime irregulari habetur. Deinde vero etiam in motu Saturni haud leues aberrationes sunt animaduersae, nomine irregularitatum satis superque notae. Tandem vero compertum est, nullum plane inter corpora coelestia dari, cuius motus regulis *Kepleri* perfecte sit conformis, quod vel ex motu Apheliorum et nodorum, quae puncta ex sententia *Kepleri* quiescere debebant, in optimis autem Tabulis Astronomicis mobilia statuuntur, manifestum est; Ex quo suspicari licet, Cometarum motus, nisi forte prope insignes Planetas praetergrediantur, solos esse regulares. Quando autem omnis irregularitas ita est comparata, vt per motum lineae absidum exacte representari possit, vix ea sentitur, dum

dum tabulae motum referentes ab illis regulis non recedere videntur: sin autem, vti in Luna fit, excentricitas praeterea variabilis assumi, atque etiam aequatio aliis correctionibus indiget, irregularitas maior adesse censetur. Nisi igitur istae irregularitates admodum fuerint enormes, eae commodissime ita definientur, vt motu quodam regulari a vero minime discrepante, tanquam fundamento constituto, aberrationes ad continuam mutationem, tam lineae absidum, quam excentricitatis, ipsiusque orbitae, reuocentur. Hoc ergo institutum Cel. Auctor, postquam iam alio modo motum Lunae, perturbationesque Saturni, inuestigasset, in hac dissertatione omni studio prosequitur, cum id ad calculum Astronomicum maxime accommodatum videatur. Cum autem irregularitates motui sese immisceant, simulac vires sollicitantes non ad punctum fixum diriguntur, neque quadratis distantiarum ab eo fuerint reciproce proportionales, inuestigationem ita instituit, vt praeter talem vim quadrato distantiae reciproce proportionalem, vnde motus omnino regularis esset proditurus, Planetam insuper ab aliis quibuscunque viribus sollicitari concipiat. Ad quarum effectum cognoscendum primo examinat casum, quo planeta hactenus motu regulari latus subito a vi externa ictum reciperet, eoque deinceps aliam orbitam describere adigeretur, quae quantum a pristina cum ratione positionis lineae absidum, tum excentricitatis, tum vero etiam ratione axis, seu parametri, sit discrepatura, sedulo exquirit. Deinde hunc ictum infinite paruum facit, singulisque momentis reperi vtcunque concipit, quandoquidem perturbationes a viribus quibuscunque oriundas tanquam ictus momentaneos considerare licet. Hoc modo Planetae motus ita ad orbitam variabilem reducetur, vt primo situs lineae absidum, tum excentricitas, ac tertio latus rectum, fiant quantitates variabiles, quas Auctor ex datis viribus perturbantibus sollicite determinat, indeque ad quoduis tempus anomaliam veram isti variabilitati consentaneam deriuat, vnde tandem Planetae motus perfecte innotescit. Haec autem praecepta generalia tradidisse Auctori sufficit, cum eorum applicatio ad quempiam casum nimis prolixos calculos postularet, sine quibus nullas plane huiusmodi inuestigationes suscipere licet. Ceterum ex iis, quae de perturbationibus Saturni, motu Lunae, et anomaliis motus Terrae, est commentatus, abunde perspicitur, quemadmodum haec praecepta per calculum exequi, atque ad vsum transferri oporteat.

PHYSICO-MATHEMATICA.

Primo loco occurrunt:

Georgii Wolffgangi Krafftii Resolutiones Problematum ad Architecturam ciuilem spectantium p. 199.

Quamuis Architectura ciuilis, profundioris Matheseos subsidio vix indigere plurimis videatur, atque huius adplicatio ad problemata architecturam spectantia com-