# XXXIII.

# Principia pro motu sanguinis per arterias determinando.

(Exhib. 1775 Dec. 21.)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

§ 15. Quoniam igitur relatio inter $p$ et $s$ constat, conveniet inde valorem formulae $\left(\frac{dp}{dz}\right)$ elicere, qui cum sola $z$ variabilis hic occurrat reperietur:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) = \frac{c}{(\Sigma - s)^2}\left(\Sigma\left(\frac{ds}{dz}\right) - \frac{sd\Sigma}{dz}\right),$$

hic valor succinctius ita exhiberi potest:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) = \frac{c\Sigma^2}{(\Sigma - s)^2} \cdot \left(\frac{d.(s:\Sigma)}{dz}\right).$$

Sicque posterior aequatio induet hanc formam:

$$\frac{2gc\Sigma^2}{(\Sigma - s)^2} \cdot \left(\frac{d(s:\Sigma)}{dz}\right) + \nu\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + \left(\frac{d\nu}{dt}\right) = 0,$$

ita ut nunc duae tantum supersint functiones $s$ et $\nu$, per ambas variabiles principales $z$ et $t$ determinandae.

§ 16. Quo has duas aequationes magis evolvamus, eas ita repraesentemus:

$$\text{I.}\quad \nu\left(\frac{ds}{dz}\right) + s\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + \left(\frac{ds}{dt}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \text{II.}\quad \left(\frac{d\nu}{dt}\right) + \nu\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + \frac{2gc\Sigma^2}{(\Sigma - s)^2}\left(\frac{d(s:\Sigma)}{dz}\right) = 0.$$

Jam a posteriore in $s$ ducta auferamus priorem in $\nu$ ductam et obtinebimus hanc aequationem:

$$s\left(\frac{d\nu}{dt}\right) - \nu\nu\left(\frac{ds}{dz}\right) - \nu\left(\frac{ds}{dt}\right) + \frac{2gcs\Sigma^2}{(\Sigma - s)^2}\left(\frac{d(s:\Sigma)}{dz}\right) = 0,$$

quam loco posterioris uti conducet.

17. Quod si loco hypothesis qua posuimus $s=\frac{\Sigma p}{c+p}$, uti velimus ista: $s=\Sigma\left(1-e^{-\frac{p}{c}}\right)$, unde prope modum eadem phaenomena produci debent, hinc prodiret:

$$p=c\log\frac{\Sigma}{\Sigma-s}, \quad \text{hincque porro} \quad \left(\frac{dp}{dz}\right)=\frac{c\Sigma}{\Sigma-s}\left(\frac{d(s:\Sigma)}{dz}\right),$$

qui valor aliquanto simplicior est quam ille qui supra prodierat:

$$\frac{c\Sigma^2}{(\Sigma-s)^2}\left(\frac{d(s:\Sigma)}{dz}\right),$$

ideoque ejus locó tuto adhiberi poterit.

## Evolutio casus

### *quo tubus rigidus statuitur.*

18. Quoniam nulla via patet, quomodo resolutio harum aequationum sit suscipienda, a casu jam satis ... incipi conveniet, quo tubus per quem fluidum propellitur rigidus statuitur, ita ut ejus amplitudo $s$ perpetuo sit aequalis amplitudini maximae $\Sigma$, ideoque functio unicae variabilis $z$ tantum, quam ob rem pro hoc casu habebimus $\left(\frac{ds}{dt}\right)=0$, unde binae aequationes motum determinantes erunt:

$$\text{I.} \quad \left(\frac{d.vs}{dz}\right)=0. \qquad \text{II.} \quad 2g\left(\frac{dp}{dz}\right)=-\left(\frac{dv}{dt}\right)-v\left(\frac{dv}{dz}\right).$$

19. Harum aequationum prima, quia in formula $\left(\frac{d.vs}{dz}\right)$, sola littera $z$ variabilis ponitur, dum tempus manet constans, ejus integrale erit $vs=T$, denotante $T$ functionem quampiam ipsius $t$, quae cum pro omnibus tubi locis debeat esse eadem, si in loco ubi embolus fluidum propellit amplitudo tubi ponatur $=b$ et celeritas qua embolus agit $=V$ manifestum est, si punctum indefinitum $Z$ in hunc locum transferatur, tum amplitudinem $s$ abire in $b$ celeritatem vero $v$ in $V$, ubi $V$ a solo tempore $t$ pendebit, sicque functio illa $T$ erit $=bV$, ita ut prima aequatio integrata nobis praebeat $sv=bV$, ideoque $v=\frac{bV}{s}$; in singulis scilicet tubi locis $Z$ celeritas fluidi erit reciproce proportionalis amplitudini tubi $s$, prorsus uti theoria motus fluidorum per tubos postulat.

20. Cum igitur ex prima aequatione nacti simus $v=\frac{bV}{s}$, ubi $V$ est functio solius temporis $t$, $s$ vero functio solius quantitatis $z$; substituamus hunc valorem in altera aequatione atque ob:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{b}{s}\cdot\frac{dV}{dt} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dv}{dz}\right)=-bV\cdot\frac{ds}{ssdz},$$

haec induet formam:

$$2g\left(\frac{dp}{dz}\right)=-\frac{b}{s}\cdot\frac{dV}{dt}+\frac{bbVVds}{s^3dz},$$

qua expressionem $p$ definiri oportet, cujus differentiale $dp$, quia ad solam variabilem $z$ refertur, tempus $t$ in hac aequatione pro constanti habeatur, hincque etiam quantitates a solo tempore pendentes, quae sunt $V$ et $\frac{dV}{dt}$, ... facta multiplicatione per $dz$, aequatio ista ita se habebit:

$$2gdp=-\frac{bdV}{dt}\cdot\frac{dz}{s}+bbVV\cdot\frac{ds}{s^3},$$

quae ergo integrata dabit:

$$2gp = -\frac{bdV}{dt}\int\frac{dz}{s} - \tfrac{1}{2}bbVV\cdot\frac{1}{ss} + T,$$

ubi $T$ talem functionem temporis designat, quae indoli quaestionis conveniet, ad quam determinandam transferamus punctum $Z$ in locum ubi embolus nunc agit; et quia hic est $s = b$, sumatur etiam integrale $\int\frac{dz}{s}$ ita ut in hoc loco evanescat; tum autem pressio $p$ aequalis fieri debet pressioni qua embolus agit in fluidum, quae ergo vis si ponatur $= P$, tota aequatio pro loco emboli erit $2gP = -\frac{1}{2}VV + T$, unde colligitur functio illa $T = 2gP + \frac{1}{2}VV$, quo ergo valore substituto, nostra altera aequatio erit:

$$2gp = -\frac{bdV}{dt}\int\frac{dz}{s} - \tfrac{1}{2}bbVV\cdot\frac{1}{ss} + 2gP + \tfrac{1}{2}VV,$$

sive:

$$2gp = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right) - \frac{bdV}{dt}\int\frac{dz}{s}.$$

§ 21. (Fig. 277.) Referat nunc figura $ABCD$ antliam quae initio fuerit fluido repleta, dum tubus annexus $CDNM$ totus fuerat vacuus, amplitudo vero antliae ubique statuatur $= b$. Dehinc vero elapso tempore $= t$ actione emboli fluidum jam sit protrusum eo usque ut nunc spatium occupet $XPMN$, ita ut massa fluidi, quae initio occupaverat spatium $ABPX$, impleat tubum $CDMN$. Ponamus igitur spatium $AX = X$, ut spatium $ABPX$ sit $bX$. Nunc vero embolus qui agit in sectione $PX$ exerceat pressionem altitudini $P$ debitam, ita ut tota ejus vis aequetur ponderi massae fluidi cujus volumen $= bP$. Hoc enim modo denotabit littera $P$ ipsam pressionem quam fluidum in $XP$ sustinet, uti jam ante assumsimus. Cum igitur $V$ denotet celeritatem fluidi in $PX$, qua tempusculo $dt$ promovetur per spatiolum $dX$, erit $dX = Vdt$ ideoque $X = \int Vdt$. Evidens autem est has quantitates $V$, $P$ et $X$ spectari debere tanquam functiones solius temporis $t$. His positis, volumen $CDMN$, quod nunc fluidum in tubo occupat fore $= bX = b\int Vdt$, sumendo scilicet integrale $\int Vdt$, ita ut evanescat posito $t = 0$. Statuatur porro tota antliae longitudo $AC = a$, cui cum ubique eadem tribuatur amplitudo $b$, erit tota massa fluidi, in quam embolus agit $= ab$, ubi notetur, $b$ esse quantitatem duarum dimensionum.

§ 22. Quo nunc facilius aequationem inventam ad istum statum accommodemus, initium tubi antliae annexi statuamus in $CD$ et vocemus intervallum $CZ = z$, tum vero in $Z$ sit amplitudo $ZV = s$ et pressio $= p$, existente celeritate uti jam invenimus $v = \frac{bV}{s}$. Sit nunc $Z$ valor integralis $\int\frac{bdz}{s}$, evanescens posito $z = 0$. Ante autem hoc integrale ita sumsimus ut evanescat translato puncto $Z$ in $X$, unde patet fore:

$$\int\frac{bdz}{s} = Z + a - X = Z + a - \int Vdt.$$

Statuatur igitur iste valor loco $\int\frac{bdz}{s}$ et nostra aequatio erit:

$$2gp = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right) - \frac{dV}{dt}\left(Z + a - \int Vdt\right),$$

quae aequatio ut ad totam fluidi massam in tubo contentam accommodetur, punctum indefinitum $Z$ a puncto $C$ usque ad $M$ promoveri debebit, ita ut volumen $CDMN$ quod est $\int sdz$ sumto $z = CM$ aequale evadat volumini $bX = b\int Vdt$, ex qua aequatione totum hoc intervallum $CM$ investigari oportet, quod igitur in genere praestari nequit, nisi amplitudinis $s$ relatio ad $z$ fuerit cognita.

§ 23. Sit igitur intervallum $CM = \omega$, amplitudo in hoc loco $MN = \sigma$ et pressio $= \pi$; tum vero valor integralis $\int \frac{bdz}{s} = Z$, posito $z = \omega$, abeat in $\Omega$, sicque pro casu quem tractamus integrale $\int s dz$, a $z = 0$ usque ad $z = \omega$ sumtum, fieri debet $= ab$. Interim tamen iste posteriores denominationes etiam locum habere possunt, quando fluidum jam initio tubum impleverit et in orificio $MN$ effluat, quo casu quantitates $\omega$, $\sigma$ et $\Omega$ erunt constantes. Hic autem eas tanquam functiones temporis $t$ spectabimus; pressio autem $\pi$ in hoc loco sive fluidum hic terminetur sive effluat, semper tanquam cognita spectari potest atque haec ipsa circumstantia inservit motui fluidi determinando, dum alias quaestio esset indeterminata.

§ 24. Quo igitur motum fluidi penitus determinemus, promoveamus punctum indefinitum $Z$ usque in $M$, ponendo $z = \omega$, $Z = \Omega$, $s = \sigma$ et $p = \pi$, atque hinc nanciscemur hanc aequationem:

$$2g\pi = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right) - \frac{dV}{dt}\left(\Omega + a - \int Vdt\right),$$

ubi jam omnes quantitates sunt functiones soluis temporis $t$, inter quas sola celeritas $V$ tanquam incognita est spectanda cujus ergo valorem per reliquas definiri oportet, id quod vix praestari posse videtur ob formulam integralem $\int Vdt$. Hanc ob rem necesse est, ut hanc aequationem in aliam formam transfundamus, quae facilius tractari queat, id quod commodissime obtinebitur, si loco temporis $t$ ipsum intervallum $AX = X$ introducamus, quando quidem etiam $X$ est functio solius temporis $t$; tum autem, ob $\int Vdt = X$ erit $dt = \frac{dX}{V}$. Hinc igitur sequentem nanciscemur aequationem:

$$2g\pi = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right) - \frac{VdV}{dX}(\Omega + a - X),$$

quae si ponamus $VV = 2y$, accipit istam formam:

$$2g\pi = 2gP + y\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right) - \frac{dy}{dX}(\Omega + a - X),$$

cujus resolutio nulla amplius laborat difficultate, quam ob rem nunc celeritatem $V$, tanquam functionem cognitam quantitatis $X$ spectare poterimus.

§ 25. Resoluta autem hac postrema aequatione, facile iterum tempus $t$ in calculum introduci poterit, et quoniam nunc celeritas $V$ pro functione cognita temporis haberi potest, in singulis tubi locis satis commode pressio fluidi assignari poterit. Cum enim ex postrema aequatione sit:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2g(P - \pi) + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right)}{\Omega + a - X};$$

qui valor in aequatione pro pressione $p$ substitutus, suppeditabit sequentem formam:

$$2gp = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right) - \frac{2g(P - \pi) + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right)}{\Omega + a - X}(Z + a - X),$$

vel calculus evadet concinnior sequenti modo. Cum habeamus has duas aequationes:

$$2gp = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right) - \frac{dV}{dt}(Z + a - X),$$

$$2g\pi = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right) - \frac{dV}{dt}(\Omega + a - X),$$

differentia harum aequationum nobis praebet:

$$2g(p-\pi)=\tfrac{1}{2}bbVV\left(\frac{1}{\sigma\sigma}-\frac{1}{ss}\right)-\frac{dV}{dt}(Z-\Omega),$$

ex qua jam facile ad quodvis tempus pro quovis tubi loco $Z$ pressio fluidi $p$ definiri potest; sicque omnia quae ad motum spectant hac ratione innotescent.

## Applicatio

*ad tubum ubique aequaliter amplum.*

§ 26. Sit amplitudo tubi $CM$ ubique eadem $=c$, ita ut sit $s=c$, ideoque $\int sdz=cz$, unde facto $z=\omega$ fiet $c\omega=bX$ ergo $\omega=\frac{bX}{c}$; ac posito $c=nb$, erit $\omega=\frac{X}{n}$. Tum vero erit etiam $\sigma=c=nb$; porro autem habebitur:

$$Z=\int\frac{bdz}{c}=\frac{z}{n},\ \text{hincque}\ \Omega=\frac{\omega}{n}=\frac{X}{nn}.$$

Quoniam vero in loco $M$ ubi fluidum terminatur pressio est nulla, erit $\pi=0$, unde aequatio nostra ad hunc locum translata erit:

$$0=2gP+\tfrac{1}{2}VV\left(1-\frac{1}{nn}\right)-\frac{VdV}{dX}\left(a+\frac{X}{nn}-X\right).$$

Deinde vero pro loco quovis indefinito $Z$ aequatio prodit ista:

$$2gp=2gP+\tfrac{1}{2}VV\left(1-\frac{1}{nn}\right)-\frac{VdV}{dX}\left(a+\frac{z}{n}-X\right).$$

§ 27. Harum aequationum prior ad terminum $M$ accommodata, quae ad solam variabilem $X$ refertur, multiplicetur per $2dX$ ut habeatur:

$$0=4gPdX+VV\left(1-\frac{1}{nn}\right)dX-2VdV\left(a+\frac{X}{nn}-X\right),$$

cujus integrale manifesto est:

$$C=4g\int PdX-aVV+VV\left(1-\frac{1}{nn}\right)X,$$

unde colligimus:

$$VV=\frac{C-4g\int PdX}{\left(1-\frac{1}{nn}\right)X-a},$$

quare si vis emboli $P$ sumatur constans $=B$, et initio motus uti erat $X=0$, fuerit etiam celeritas $V=0$, ob $\int PdX=BX$ erit constans $C=0$, hincque fiet:

$$VV=\frac{4gBX}{a-\left(1-\frac{1}{nn}\right)X},$$

unde cum embolus per totam antliam seu spatium $AC=a$ fuerit promotus, ita ut fiat $X=a$, tum erit $VV=4n^2gB$; tum autem erit $CM=\frac{a}{n}$, ista autem celeritate fluidum deinceps per tubum uniformiter progredietur, nisi nova emboli actio cum fluido affluente succedat.

§ 28. Durante autem actione emboli cujus vim constantem assumsimus, pressio $p$ in quovis tubi loco $Z$ ea posteriori aequatione § 26 facile determinari poterit. Si enim ab ea praecedens aufferatur, relinquetur ista aequatio:

$$2gp = \frac{VdV}{dX}\left(\frac{X}{nn} - \frac{z}{n}\right).$$

Cum igitur sit:

$$VV = \frac{4gBX}{a - \left(1 - \frac{1}{nn}\right)X},$$

erit differentiando:

$$\frac{VdV}{dX} = \frac{2agB}{\left(a - \left(1 - \frac{1}{nn}\right)X\right)^2},$$

hoc ergo valore substituto reperietur pressio:

$$p = \frac{aB}{\left(a - \left(1 - \frac{1}{nn}\right)X\right)^2}\left(\frac{X}{nn} - \frac{z}{n}\right).$$

Hae igitur expressiones simpliciores reddentur, ponendo $\frac{1}{n} = \lambda$ ut sit $b = \lambda c$, ubi numerus $\lambda$ semper unitate major considerari potest, tum enim habebimus:

$$VV = \frac{4gBX}{a + (\lambda\lambda - 1)X} \qquad \text{et} \qquad p = \frac{aB}{[a + (\lambda\lambda - 1)X]^2}(\lambda\lambda X - \lambda z).$$

Cum igitur sit celeritas in loco indefinito $Z$ scilicet $v = \lambda V$, unde fiet:

$$vv = \lambda\lambda VV = \frac{4\lambda\lambda gBX}{a + (\lambda\lambda - 1)X}.$$

§ 29. Quod si jam processum omnium harum operationum attentius perpendamus, reperiemus ad successum plurimum contulisse, expulsionem elementi temporis $dt$ cujus loco scripsimus $\frac{dX}{V}$, postquam scilicet celeritatem $v$ ex calculo eliminavimus, ita ut totum negotium eo sit perductum, ut celeritas emboli $V$ per variabilem $X$ definiri debuerit. Tum vero pressio $p$ evasit functio binarum variabilium $X$ et $z$. Ceterum hic omni attentione dignum reperitur, quod ex unica aequatione posteriore non solum celeritas $V$ sed etiam pressio $p$ definiri potuerit, id quod indoli functionum duas variabiles involventium est tribuendum. Ex quo intelligitur, etiam investigationem motus per tubos elasticos simili modo suscipi debere.

§ 30. Quod si autem hanc tractationem simili modo suscipere vellemus, in calculos fere inextricabiles incideremus; neque enim integratio binarum formularum principalium tam facile esset successura. Verum hic paradoxon non parum mirandum se offert, in eo consistens quod, dum pro casu tuborum rigidorum binas aequationes totam solutionem continentes scilicet: 1) $vs = bV$ et

$$2)\quad 2gp = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right) - \frac{VdV}{dX}(Z + a - X)$$

per integrationem ex principalibus elicuimus, easdem aliam viam ingrediendo per differentiationem obtinere liceat, quam analysin utique opera pretium erit hic accuratius evolvere, quippe quae deinceps etiam ad tubos elasticos felici successu adhiberi poterit.

*

## Alia methodus

*motum per tubos rigidos determinandi.*

§ 31. Manentibus omnibus denominationibus ut hactenus, consideretur portio fluidi indefinita in spatio $XP$ et $ZV$ contenta, cujus volumen erit $b(a-X)+\int sdz$, dum scilicet integrale $\int sdz$ a termino $z=0$ capitur. Jam ista portio promoveatur elemento temporis in situm $xpzv$, existente spatiolo $Xx=dX$ et $Zz=dz$, quae spatiola cum celeritatibus $V$ et $v$ percurrantur, erit $dX:dz=V:v$ ideoque $dz=\frac{vdX}{V}$; quam ob rem cum massa hujus portionis eadem manere debeat, differentiale formulae $b(a-X)+\int sdz$, sumendo tam $X$ quam $z$ variabile, nihilo aequari debet, si modo loco $dz$ scribatur $\frac{vdX}{V}$, quoniam igitur $s$ est functio solius $z$ ideoque etiam ipsa formula $\int sdz$, haec differentiatio dabit $-bdX+\frac{vsdX}{V}=0$ ideoque $vs-bV=0$ sive $vs=bV$.

§ 32. Pro altera aequatione eruenda consideremus vim vivam ejusdem fluidi portionis $XPZV$, quae reperitur dum singula ejus elementa per quadratum celeritatis qua moventur multiplicetur, unde ista vis viva erit $=b(a-X)VV+\int vvsdz$, quae loco $v$ posito valore modo invento abibit in hanc:

$$b(a-X)VV+bb\int\frac{VVdz}{s},$$

quae expressio, quia $V$ non a $z$ pendet, ita repraesentari potest:

$$b(a-X)VV+bbVV\int\frac{dz}{s}.$$

Quod si jam ista massa in statum sequentem promoveatur, ita ut sit ut ante $dz=\frac{vdX}{V}$ sive $dz=\frac{bdX}{s}$, incrementum vis vivae interea ortum erit:

$$2bVdV\left(a-X+\int\frac{bdz}{s}\right)+bVV\left(-dX+\frac{bbdX}{ss}\right)=2bVdV(a-X+Z)+bVVdX\left(-1+\frac{bb}{ss}\right).$$

§ 33. Statuatur hoc incrementum vis vivae brevitatis gratia $WdX$ ut sit:

$$W=\frac{2bVdV}{dX}(a-X+Z)-bVV\left(1-\frac{bb}{ss}\right),$$

altera vero aequatio quam supra per integrationem sumus nacti ita repraesentetur:

$$2gP-2gp=\frac{VdV}{dX}(a-X+Z)-\tfrac{1}{2}VV\left(1-\frac{bb}{ss}\right),$$

quae aequatio introducendo incrementum vis vivae $WdX$ induet hanc formam $2g(P-p)=\frac{W}{2b}$, ita ut sit ipsum incrementum vis vivae $WdX=4gb(P-p)dX$, id quod egregie convenit cum principiis motus ad generationem vis vivae applicatis, cum $P$ exhibeat vim fluidum propellentem, et $p$ vim retro pellentem.

§ 34. Quod quo clarius ob oculos ponatur, consideremus in genere massam $M$ celeritate motam $V$, et a vi motrice $\Pi$ in eadem directione sollicitatam, ac primum principium motus praebet $MdV=2g\Pi dt$, unde si spatiolum percursum ponatur $=dX$ ut sit $dt=\frac{dX}{V}$, haec aequatio fiet $MVdV=2g\Pi dX$ sive $2MVdV=4g\Pi dX$, ubi $2MVdV$ manifesto est incrementum vis vivae $MVV$, quod ergo semper aequatur formulae $4g\Pi dX$. Nostro autem casu, duas habemus vires alteram propellentem, quae est $= bP$, quae revera per spatiolum $dX$ promovetur, unde ab ea vis viva generatur $= 4gbPdX$, ab altera autem vi contraria, quae est $= ps$ et per spatiolum $dz$ movetur, oritur vis viva $4gspdz$, quae ob $dz = \frac{bdX}{s}$ erit $4gbpdX$, qui effectus ab illo subtractus relinquit verum incrementum vis vivae $4gbdX(P - p)$, quod ergo utique aequale esse debet ipsi $WdX$, prorsus uti supra invenimus. Sicque nunc eandem aequationem quam supra per integrationem elicuimus, nunc per differentiationem sumus consecuti: Hoc igitur modo etiam casum pro tubis elasticis evolvi conveniet.

## Investigatio formularum
### *pro motu fluidi per tubos elasticos.*

§ 35. Hic igitur ratiocinium eodem prorsus modo instituatur ut ante, hoc sole discrimine observato, quod amplitudo $s$ hic sit functio ambarum variabilium $X$ et $z$, ita ut ejus differentiale sit:

$$ds = dX\left(\frac{ds}{dX}\right) + dz\left(\frac{ds}{dz}\right);$$

primo igitur consideretur quantitas fluidi in spatio indefinitio $XPZV$ contenti, quae ut ante est $b(a-X) + \int sdz$, cujus ergo incrementum ex variabilitate utriusque $X$ et $z$ ortum est $-bdX + sdz + dX\int dz\left(\frac{ds}{dX}\right)$, quod igitur exprimit excessum voluminis in spatio $xpzv$ contenti supra volumen $XPZV$.

§ 36. Cum igitur celeritas in $XP$ sit $= V$, in $ZV$ vero $= v$, dum stratum $ZV$ per spatiolum $Xx$ progreditur alterum stratum $ZV$ per tantum spatiolum $Zz = dz$ proferetur, ut sit $dX : dz = V : v$, ideoque $dz = \frac{vdX}{V}$, quare si in superiori expressione loco $dz$ scribamus istum valorem $\frac{vdX}{V}$, ea nihilo aequalis fieri debet, unde oritur haec aequatio $-b + \frac{sv}{V} + \int dz\left(\frac{ds}{dX}\right)$, ex qua aequatione colligitur celeritas $v$, quae ergo erit:

$$\frac{bV}{s} - \frac{V}{s}\int dz\left(\frac{ds}{dX}\right).$$

Ponatur hic brevitatis gratia formula $\int dz\left(\frac{ds}{dX}\right) = S$, ut habeatur $v = \frac{V(b-S)}{s}$, hincque fiet spatiolum:

$$Zz = \frac{(b-S)\,dX}{s}.$$

§ 37. Contemplemur nunc quoque vim vivam fluidi in spatio $XPZV$ contenti, quae ut ante erit $bVV(a-X) + \int vvsdz$, quae loco $vv$ valore substituto quoniam $V$ tantum est functio ipsius $X$, transibit in hanc formam:

$$VV\left(b(a-X) + \int\frac{(b-S)^2\,dz}{s}\right);$$

scribamus brevitatis gratia $\frac{(b-S)^2}{s} = \Phi$ ut ista vis viva sit $VV(b(a-X) + \int\Phi dz)$, cujus differentiale ex utraque variabilitate oriundum erit:

$$2VdV(b(a-X) + \int\Phi dz) - bVVdX + VV\Phi dz + VVdX\int dz\left(\frac{d\Phi}{dX}\right),$$

erit autem:

$$\left(\frac{d\Phi}{dX}\right) = -\frac{2(b-S)}{s}\left(\frac{dS}{dX}\right) - \frac{(b-S)^2}{ss}\left(\frac{ds}{dX}\right),$$

ubi cum sit:
$$S = \int dz \left(\frac{ds}{dX}\right) \quad \text{erit} \quad \frac{dS}{dX} = \int dz \left(\frac{dds}{dX^2}\right).$$

His igitur valoribus substitutis erit incrementum vis vivae ponendo $dz = \frac{(b-S)\,dX}{s}$:

$$2VdV\,(b\,(a-X) + \int \Phi dz) - bVVdX + VV\frac{(b-S)^3}{ss}\,dX$$
$$+ 2VVdX \int dz \frac{(b-S)}{s} \int dz \left(\frac{dds}{dX^2}\right) - VVdX \int dz \frac{(b-S)^2}{ss}\left(\frac{ds}{dX}\right).$$

Vel quoniam functio $\Phi$ ut cognita spectari potest, istud incrementum succinctius ita exprimi potest:

$$2VdV\,(b\,(a-X) + \int \Phi dz) - bVVdX + \frac{VV(b-S)^3}{ss}\,dX + VVdX \int dz \left(\frac{d\Phi}{dX}\right).$$

§ 38. Hoc autem incrementum vis vivae oritur primo ab actione vis $P$, quae cum in basin $= b$ fungit, ejus quantitas erit $= bP$ et per spatiolum $dX$ agit unde ejus actio uti supra vidimus aestimari debet formula $4gbPdX$. Deinde quia eadem fluidi massa retro urgetur, pressione $p$, in basin $= s$ agente, ejus quantitas est $ps$ et quoniam per spatiolum $dz = \frac{(b-S)\,dX}{s}$ agit, ejus actio erit $4gp\,(b-S)\,dX$. Hanc igitur expressionem a praecedente subtrahi oportet, ut obtineatur formula incremento vis vivae aequalis, quae ergo erit $4gdX(b(P-p)+pS)$, unde aequatio sequens resultat:

$$4g\,(b(P-p)+pS) = \frac{2VdV}{dX}\,(b\,(a-X) + \int \Phi dz) - bVV + VV\frac{(b-S)^3}{ss} + VV\int dz\left(\frac{d\Phi}{dX}\right),$$

ubi meminisse oportet esse:

$$S = \int dz \left(\frac{ds}{dX}\right) \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{(b-S)^2}{s}.$$

§ 39. Inventa autem hac aequatione recordandum est, certam dari relationem, inter pressionem $p$ et amplitudinem $s$, pro qua supra assumsimus hanc formulam $\frac{cs}{\Sigma - s}$ vel etiam $p = c\log\frac{\Sigma}{\Sigma - s}$, ubi $\Sigma$ denotat maximam ampitudinem ad quam tubus in $Z$ expandi potest, ita ut $\Sigma$ sit tantum functio ipsius $z$ a variabili $X$ neutiquam pendens. Quod si ergo in nostra aequatione loco $p$ talem valorem scribamus, nostra aequatio ita binas variabiles $X$ et $z$ involvet, ut primo quantitates $P$ et $V$ sint functiones solius $X$, litterae autem $s$ $S$ et $\Phi$ denotent functiones utriusque variabilis $X$ et $z$ simul, sola vero littera $\Sigma$ sit functio ipsius $z$ tantum.

§ 40. Hanc igitur ob causam aequatio nostra inventa plus una determinatione involvit. Primo enim ex ea deduci debet talis relatio inter $V$ et $X$ quae perpetuo maneat eadem, quomodocunque altera variabilis $z$ et quantitates inde pendentes interea varientur. Deinde vero ista relatione stabilita et loco $V$ suo valore per $X$ substituto, ex hac eadem aequatione elici debet natura functionis $s$, prouti ea per utramque variabilem $X$ et $s$ determinatur.

§ 41. Ad relationem autem inter $V$ et $X$ eliciendam necesse est, ut in certo tubi loco veluti ad $MN$ pressio fluidi tanquam cognita spectari possit, qualem statum in extremitate arteriarum, ubi vel in glandulas vel in venas desinunt, concipere licet. Referat igitur in nostro tubo sectio $MN$ istum terminum ac ponamus totum intervallum $CM = f$, ubi pressio perpetuo maneat constans $= k$, hinc ergo etiam erit amplitudo in isto loco constans, quae sit $= h$. Nunc igitur posito $z = f$, fiet $s = h$ et $p = k$, ex hocque casu quo in nostra aequatione tantum functiones ipsius $X$ inerunt determinari debebit celeritas $V$, qui in generali aequatione substitutus novam praebebit aequationem, ex qua naturam functionis $s$ scrutari conveniet, qualis scilicet futura sit functio ambarum variabilium $X$ et $z$.

§ 42. Cum autem nulla prorsus via pateat talem resolutionem perficiendi, haecque investigatio vires humanas transcendere sit censenda, hic utique isti labori finem imponere cogimur. Interim tamen fortasse non parum juvabit ad eam circumstantiam attendere, quod quavis nova cordis actione status sanguinis per omnes arterias idem recurrat, cui conditioni satisfiet, quando finita actione nostri emboli, hoc est posito $X=h$ omnes quantitates nostram aequationem ingredientes eosdem prorsus valores iterum recuperant, quos habebant initio, ubi erat $X=0$, sicque omnes functiones quae hic occurrunt ita oportebit esse comparatas, ut sive ponatur $X=0$ sive $X=a$, eosdem plane valores nanciscantur.

§ 43. In motu igitur sanguinis explicando easdem offendimus insuperabiles difficultates, quae nos impediunt omnia plane opera Creatoris accuratius perscrutari; ubi perpetuo multo magis summam sapientiam cum omnipotentia conjunctam admirari ac venerari debemus, cum ne summum quidem ingenium humanum vel levissimae vibrillae veram structuram percipere atque explicare valeat.