XXI.

Constructio Manometri densitatem aëris quovis tempore accurate monstrantis.

§ 1. Cum omnia corpora in aëre tantum de suo pondere vero amittant, quantum est pondus aëris sub eodem volumine contenti, hinc tutissimus modus suppeditatur, aëris densitatem in quovis ejus statu explorandi, propterea quod aëris densitas semper proportionalis est ponderi, quod certum volumen esset habiturum, ideoque nil aliud requiritur, nisi ut idoneum instrumentum paretur, quod quovis tempore diminutionem ponderis, quam, corpus quodpiam fixum patiatur, monstret, quod quomodo commodissime institui queat hic accuratius perpendemus.

§ 2. Hunc in finem eligatur quodpiam corpus, cujus indolem deinceps exactius describemus, cujus volumen sit $= A$, qua littera simul indicetur pondus aequalis voluminis aquae, et quia ipsius aquae plures dantur species, quae pro diverso caloris gradu magis minusve extenduntur aut contrahuntur, ad nostrum institutum sufficit, ut certa aquae species pro determinato caloris gradu eligatur, cujus ergo pondus sub volumine A contentum accurate definiatur. Eodem autem tempore simul pondus ipsius corporis sub volumine A contenti mensuremus, quod sit $= \alpha A$, ita ut sit ad pondus aequalis voluminis aquae, ut α ad 1. Pro eodem autem tempore accurate definiatur pondus aequalis voluminis aëris, quod sit $= \delta A$, ita ut hoc tempore densitas aëris se habeat ad densitatem aquae nostrae fixae, ut δ ad 1, quae investigatio ope antliae pneumaticae commodissime fieri potest.

§ 3. Cum igitur αA denotet verum pondus corporis in hunc finem electi, ejus pondus observatum scilicet ob aëris densitatem diminutum erit $(\alpha - \delta) A$, quod cum a bilance ostendatur, sit brevitatis gratia $= P$. Primo autem hic assumamus volumen corporis nostri A perpetuo idem manere neque a diverso caloris gradu ullam mutationem subire; deinceps enim facile erit, etiam hujus mutationis rationem in calculo habere. Hic tantum notasse sufficiat, quamcunque mutationem volumen A patiatur litteram α similem mutationem inverso modo pati debere, ita ut quantitas αA perpetuo eundem valorem conservet.

§ 4. Ponamus nunc alio quovis tempore densitatem aëris esse $=\delta+\varphi$, ubi quidem φ quantitas vel positiva vel negativa esse potest, et nunc pondus corporis nostri bilance indicat. $(\alpha-\delta-\varphi)A$, quod cum a bilance indicetur, sit $=P-p$; quare cum sit $P=(\alpha-\delta)A$, $p=\varphi A$, unde ergo fit

$$\varphi=\frac{p}{A} \quad \text{et cum sit} \quad A=\frac{P}{\alpha-\delta} \quad \text{erit} \quad \varphi=\frac{p\,(\alpha-\delta)}{P}$$

hincque ipsa aëris densitas pro hoc tempore erit:

$$\delta+\varphi=\delta+\frac{p\,(\alpha-\delta)}{P}.$$

§ 5. Quo nunc minimae aëris mutationes observari queant necesse est, ut pro quovis valore quantitas p ad P adhuc notabilem teneat rationem, quam scilicet bilanx optimae notae indic valeat. Cum igitur sit $\frac{p}{P}=\frac{\varphi}{\alpha-\delta}$, hinc statim patet, hoc eo meliori successu obtineri posse, quo minor fuerit littera α, hoc est, quo levius fuerit corpus ad has observationes electum.

§ 6. Quo haec clarius perspiciantur casum consideremus, quo volumen A pedi cubico aequale ideoque P circiter 64 libr. Deinde sit pro statu aëris fixo:

$$\delta=\frac{1}{800} \quad \text{et} \quad \delta+\varphi=\frac{1}{700},$$

ita ut densitas aëris satis insigne incrementum acceperit, quod quanto pondere p a bilance indicetur videamus. Cum igitur sit:

$$\frac{p}{P}=\frac{\varphi}{\alpha-\delta}, \text{ob } \varphi=\frac{1}{5600} \text{ erit } \frac{p}{P}=\frac{1}{5600\,\alpha-7}.$$

Quare si corpus cum aqua esset aeque grave, ideoque $\alpha=1$, foret $\frac{p}{P}=\frac{1}{5593}$, qualem exiguam partem optima bilanx aegre esset indicatura, neque ergo hinc minores mutationes in densitate aëris agnoscere liceret. Sin autem nostrum corpus decies esset levius quam aequale volumen aquae, ob

$$\alpha=\frac{1}{10} \text{ foret } \frac{p}{P}=\frac{1}{553},$$

cujusmodi particulam bona bilanx indicare satis distincte poterit. Interim tamen ut etiam minores mutationes indicari queant, sine dubio optima bilance opus erit. Imprimis igitur ad hujusmodi experimenta requiritur, ut corpus levissima materia constans eligatur.

§ 7. Ad hunc igitur usum aptissime adhibebitur globus vitreus cavus tam exiguae crassitiei quantum ejus firmitas permittit; praecipue enim necesse est, ut iste globus perpetuo eandem quantitatem materiae includat, unde ipsi aëri, cujus densitatem explorare volumus, penitus impervius esse debet, ita ut neque aër inclusus usquam erumpere neque externus irrumpere queat, unde parum consultum foret omnem aërem ex hoc globo exhaurire, uti alii docuerunt, quia cum tempore tandem aër externus ingressum esset inventurus. Optima igitur ratio erit hunc globum aëre naturali repletum relinquere.

§ 8. Videamus etiam, quantopere exigua mutatio voluminis A, a diversis gradibus caloris portiones turbare valeat. Hunc infinem sumamus volumen A suo differentiali dA augeri et δ sit quantitas constans, ob $P = (\alpha - \delta) A$ erit $dP = -\delta \,.\, dA$; unde si esset

$$dA = \frac{1}{1000} A, \text{ foret } dP = \frac{-A}{800000} = \frac{-P}{(\alpha - \delta)\, 800000} = \frac{-P}{79000},$$

ob $\delta = \frac{1}{800}$ et $\alpha = \frac{1}{10}$, uti supra assumsimus; hincque porro erit:

$$\varphi = \frac{p\,(\alpha - \delta)}{P + dP} = \frac{p\,(\alpha - \delta)}{P}\left(1 - \frac{dP}{P}\right); \text{ quare, ob } \frac{dP}{P} = \frac{1}{80000} \text{ proxime,}$$

in valore ipsius φ tantus error committeretur, qui autem tam est parvus, ut etiam optimam bilancem adhibendo sempertuto negligi queat, unde exigua mutatio in volumine A ob calorem oriunda prorsus non pertimescenda videtur.

§. 9. Perpendamus nunc ad quantum praecisionis gradum Manometrum evehi debeat, ut satis exiguas mutationes in aëris densitate ostendat, et cum posito:

$$\delta = \frac{1}{800} \text{ et } \delta + \varphi = \frac{1}{700}, \text{ unde fit } \varphi = \frac{1}{5600},$$

hoc discrimen sit ingens, merito postulari potest, ut Manometrum mutationes saltem decies minores adhuc satis distincte monstret, ad quod ergo requiritur, ut pro valore $\varphi = \frac{1}{56000}$ instrumentum adhuc sensibilem differentiam manifestet.

§. 10. Cum igitur invenerimus

$$\varphi = \frac{p\,(\alpha - \delta)}{P} \text{ hinc fit } \frac{p}{P} = \frac{1}{56000\,(\alpha - \delta)};$$

unde libra ita debet esse comparata, ut si p fuerit minima pars totius ponderis P, ea circiter isti valori aequetur, vel saltem eo non fit major. Ex quo statim intelligitur, si esset $\alpha = 1$, sive pondus globi gravitati aquae esset aequale nullam certe bilancem tam accuratam construi posse, ut jam exigua particula totius ponderis adhuc sensibile praepondium producere valeat, unde absolute necesse est, ut litterae α multo minor valor concilietur.

§. 11. Quod si ergo optima bilanx adhuc 5000$^{\text{mam}}$ partem totius ponderis indicare valeat, necesse est ut in Manometro valor ipsius α minor sit quam $\frac{1}{10}$, hoc est, ut pondus totius globi decies minus sit quam pondus aequalis voluminis aquae, id quod utique obtineri posse videtur, atque si adhuc levior globus effici posset, Manometrum ad majorem perfectionis gradum perduci posset. Hinc imprimis erit examinandum ex quanam materia nostrum globum parari conveniat, ubi quidem vitrum longe praeferandum videtur. Etsi enim ligno et charta leviores hujusmodi globi confici possent, tamen, quia humiditatem aëris contraherent penitus sunt rejiciendi. Tum vero metalla non solum ob majorem gravitatem hinc excludi debent, sed etiam quia pro diversis caloris gradibus majorem mutationem subire solent quam vitrum.

§. 12. Consideremus igitur globum ex vitro paratum, cujus cavitatis radius sit $= r$, crassities crustae vitreae ambientis $= s$, ita ut totius globi radius sit $r + s$, cujus ergo cubo volumen proportionale, volumen vero crustae vitreae erit ut $(r + s)^3 - r^3$; unde si gravitas vitri fuerit ad gravitatem aquae ut m ad 1, neglecto pondere aëris inclusi erit pondus globi $m((r+s)^3 - r^3)$, dum pondus aequalis cubi aquae est $(r+s)^3$, unde deducitur:

$$\alpha = m\left(1 - \frac{r^3}{(r+s)^3}\right).$$

Est autem circiter $m = \frac{1}{4}$.

§ 13. Valor igitur hujus formulae inprimis pendet a ratione inter litteras r et s, quae si esset constans, valor quoque ipsius α esset constans, ideoque globus quantumvis parvus idem esset praestaturus; at vero per experientiam satis constat augendo radium globi r non necesse esse, ut crassities in eadem ratione augeatur. Quin etiam satis tuto assumere licebit, sufficere si modo in ratione sub duplicata increscat, sicque assumere poterimus, $s = \sqrt{ar}$. Hinc ergo, si pro globo cujus radius unius pedis crassities vitri unius lineae seu quasi partis 150^ae pedis sufficientem firmitatem praestet, erit $a =$ parti 22500^ae pedis sumto scilicet pede pro mensura magnitudinum. Cum autem s prae r sit valde parvum, erit proxime:

$$\frac{r^3}{(r+s)^3} = \left(1 + \frac{s}{r}\right)^{-3} = 1 - \frac{3s}{r}, \text{ ex quo fiet } \alpha = \frac{3ms}{r} = 3m\sqrt{\frac{a}{r}}, \text{ existente } a = \frac{1}{22500}$$

unde pro variis globi magnitudinibus valores litterae α facile assignare licebit. Ita:

Si	$r = 1$ ped.	erit	$\alpha = 0{,}0200 \,.\, m$
»	$r = \frac{1}{2}$	» »	$\alpha = 0{,}0283 \,.\, m$
»	$r = \frac{1}{3}$	» »	$\alpha = 0{,}0346 \,.\, m$
»	$r = \frac{1}{4}$	» »	$\alpha = 0{,}0400 \,.\, m.$

§ 14. Facile autem intelligitur, hos numeros ingentem latitudinem admittere, cum fractio assumta $s = \frac{1}{150}$ pro $r = 1$ in praxi modo aliquanto major modo minor admitti queat, unde etiam superfluum foret, valorem ipsius m auxie inquirere, qui ergo si sumatur $= 2\frac{1}{2}$ pro radio $r = 1$ ped. foret α circiter $\frac{1}{20}$, unde colligitur $\frac{p}{P} = \frac{1}{2800}$, quod bilances facile indicare possunt. Sin autem radius sphaerae fuerit tantum 6 pollicum erit $\alpha = \frac{7}{100}$ et $\frac{p}{P} = \frac{1}{3920}$. Deinde pro radio $r = \frac{1}{4}$ ped. fiet $\alpha = \frac{1}{10}$ et $\frac{p}{P} = \frac{1}{5600}$, unde patet, si modo radius sphaerae superet 3 pollices, bilancem ordinariam satis tuto mutationes illas exiguas quas requirimus in densitate aëris, indicare posse. Interim tamen plurimum expediet globos hujusmodi vitreos majores adhibere, simulque bilances ad majorem perfectionis gradum evehere, ut etiam minores mutationes in aëris densitate satis distincte monstrare valeant.

§ 15. Consideremus nunc libram, cujus ope exiguas istas variationes in densitate aëris cognoscere liceat, sitque EF (Fig. 242.) jugum in statu aequilibrii, ubi situm horizontalem tenebit, cujus medium sit punctum O, E et F autem puncta suspensionis, in quorum altero E appensus sit globus vitreus A, in altero vero F pondus aequilibrans P. Ad jugum in O normaliter ducta sit recta NH, cujus punctum C sit centrum circa quod jugum est mobile, punctum G vero centrum gravitatis ipsius jugi, recta autem OH examen seu lingulam repraesentat. Vocemus nunc $OE = OF = a$

$OC = c$ et $OG = g$; tum vero pondus ipsius jugi sit Π, et quoniam hic imprimis caven- ne jugum ab appensis ponderibus incurvetur, hoc obtinebitur, si ipsi circa medium major latitudo MN tribuatur.

§. 16. Ponamus nunc certo tempore, quo densitas aëris pro cognita assumitur, scilicet $= \delta$, aquae unitate designando, appensione ponderis P libram in aequilibrium esse reductam, evidens est, si pondus P aequali volumine constaret, quo globus vitreus, cujus volumen indi- litera A tum libram perpetuo in aequilibrio esse mansuram eatenus ergo tantum mutationes indicabit quatenus pondus P sub minore volumine continetur unde consultum erit, pondus P gravissima materia, veluti plumbo, conficere. Sit igitur B volumen ponderis, atque libra conci- in spatium aëre vacuum transferri, ubi pondus globi augmentum accipiet $= \delta A$, pondus tantum augmentum δB, sicque nunc discrimen inter ambo pondera erit $\delta(A - B)$; unde intelligitur, turbationem aequilibrii a mutatione densitatis aëris oriundam referendam esse, non ad volumen A, sed ad ejus excessum super volumine ponderis P.

§. 17. Ponamus nunc, alio tempore, quo densitas aëris facta est $= \delta + \varphi$ libram in statum quem (Fig. 243.) repraesentat, esse perductam quo pondus globi tantum est $P - p$, inclinationem esse $EOe = FOf = \omega$, sub quo angulo etiam recta GOC ad situm verticalem inclinabitur, quem ergo angulum, ex densitatis mutatione φ ortum, investigemus. Quare cum in statu inclinato aequilibrium etiam nunc subsistat, necesse est, ut momenta respectu centri C sint aequalia. Nunc igitur momentum globi A, ob $OE = a$ et angulum $EOe = \omega$, erit $(P - p)(a \cos\omega + c \sin\omega)$; ipsum vero pondus jugi Π in centro gravitatis G collectum momentum in eandem partem generabit $\Pi(c + g)\sin\omega$. Ex altera autem parte pondus P momentum habebit $P(a\cos\omega - c\sin\omega)$, quibus duobus momentis inter se aequatis orietur haec aequatione:

$$(2cP - cp + (c + g)\,\Pi)\sin\omega - ap\cos\omega = o.$$

Hic scilicet diminutionem ipsius ponderis P jam in ponderculo p complectimur, quia diminutio pon- derum p refertur ad differentiam voluminum $A - B$.

§. 18. Ex hac jam aequatione ipsa inclinatio ω innotescit, cum sit:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{ap}{2cP - cp + (c + g)\,\Pi}$$

quae ergo ipsi p est proportionalis, atque ut pro minimo valore ipsius p angulus ω adhuc prodeat notabilis magnitudinis, intervalla c et g facile ita assumi possunt, ut denominator quantumvis fiat exiguus, posset quidem adeo ad nihilum redigi, tum vero aequilibrium librae non amplius esset stabile, sed a minimo praepondio penitus subverteretur, id quod multo magis eveniret, si denominator adeo valorem obtineret negativum.

§. 19. Omnino igitur in id est incumbendum, ut denominatori valor positivus, attamen satis exiguus concilietur, ut ponderculo p tanta inclinatio respondeat, quantam desideramus; quem in finem maxime conveniret intervallum $OC = c$ ad nihilum redigi, ita ut centrum motus C in ipsam rectam EF, per puncta suspensionis ducta, incideret, quo ergo casu foret $\operatorname{tang}\omega = \frac{ap}{g\Pi}$. Cum autem talis constructio in praxi aegre obtineri queat, consultum erit, in directione HOG (Fig. 2 ope cochleae mobile applicare cujus ope centrum gravitatis G, sive elevari sive deprimi queat

§ 20. Cum igitur supra invenerimus $\varphi = \frac{p(\alpha - \delta)}{P}$ si instrumentum, ita paretur, ut ex obser inclinatione ω ponduscutum p accurate definiri possit, inde simul mutatio in densitate aëris φ innotescet, hocque tempore aëris densitas erit $\delta + \varphi$.

§ 21. Eadem conclusio etiam alio modo obtineri potest, ita ut non opus sit inclinat librae observare. Turbato enim aequilibrio, si id restituatur dum ex altera parte exiguum pondu culum additur, ex quo deinceps ponduscuium p haud difficulter concludi poterit si tantum casu effectus dati ponduscuii adjecti fuerit exploratus. Si enim initio, quo libra fuerit ponderi P addatur datum ponduscuium π, atque inclinatio inde orta mensuretur, quoniam tang inclinationum ponduscuiis sunt proportionales, totum negotium haud difficulter expediri poterit adeo tabula supputare, quae pro quavis librae inclinatione mutationem in densitate aëris indicet.

§ 22. Ceterum cum librae consuetae sint super apice quodam mobiles, cujusmodi structur semper cum quapiam frictione est conjuncta, ejus loco fortasse cum optimo successu jugum cylindrulum plane horizontali incumbentem mobile reddi potest, qualis structura olim in fabricatio acus magneticae inclinatoriae est adhibita, ubi minimae variationes nulla frictione impediuntur. autem structuram sollertiae Artificis relinqui oportet.