

E712

DE

CORPORIBVS CYLINDRICIS
INCVRVATIS.

Auctore

L. EVLERO.

Conv. Acad. exhib. die 21 Sept. 1778.

§. 1.

Quemadmodum cylindrus rectus generatur, si centrum circuli ita secundum lineam rectam promovetur, ut interea planum circuli perpetuo ad istam rectam perpendiculare conservetur: ita si centrum circuli secundum lineam curvam quamcunque ita promoveatur, ut planum circuli in singulis punctis ad tangentem curvae situm teneat perpendicularem, hoc modo generabitur cylindrus incurvatus, cuius scilicet axis erit linea curva atque omnes sectiones ad hunc axem normaliter factae erunt circuli circulo genitori aequales.

§. 2. Contemplemur nunc aequationem inter ternas coordinatas, qua natura talium cylindrorum incurvatorum more solito exprimi poterit. Hunc in finem referat curva **AU**, utcumque super plano tabulae descripta, viam, qua centrum circuli procedit, pro qua vocemus coordinatas **AT = t** et **TU = u**, sitque $\partial u = s \partial t$; atque ducta ad curvam normali

Tab. I.
Fig. 1.

M 2

UN

UN , erit subnormalis. $TN = \frac{z \partial z}{\partial x} = s u$ et ipsa normalis: $UN = u \sqrt{1 + s s}$. Haec igitur normalis producta dabit intersectionem circuli genitoris dum eius centrum per punctum U tranfit, ipse vero circulus plano tabulae perpendiculariter infitere est concipiendus.

§. 3. Sit nunc Z punctum quodcunque in periphēria istius circuli, quod ergo simul reperietur in superficie corporis, quod hic consideramus; unde si ad planum tabulae demittatur perpendiculum ZY , tum vero ab Y ad rectam fixam AB normalis YX , habebuntur ternae coordinatae, quas vocemus $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, inter quas aequatio quaeri debet naturam superficiei genitae exprimens, quae ergo quemadmodum ex indole curvae directricis AU deduci queat, videamus.

§. 4. Vocetur igitur radius circuli genitoris $= a$, et cum fit intervallum $UZ = a$ et $YZ = z$, erit recta $UY = \sqrt{aa - zz}$. Iam ducta ex U ad YX normali US , ex similitudine triangulorum USY et NTU colligemus:

$$US = \frac{s \sqrt{aa - zz}}{\sqrt{1 + s s}} = TX \text{ et } SY = \frac{\sqrt{aa - zz}}{\sqrt{1 + s s}},$$

hinc ergo nanciscimur coordinatas

$$AX = x = t - \frac{s \sqrt{aa - zz}}{\sqrt{1 + s s}} \text{ et}$$

$$XY = y = a + \frac{\sqrt{aa - zz}}{\sqrt{1 + s s}},$$

unde si eliminentur binae quantitates variables t et u , una cum littera s inde pendente, reperietur aequatio inter x , y et z , qua natura superficiei descriptae exprimetur.

§. 5. Veluti si curva A U etiam fuerit circulus, hac aequatione expressus: $uu = 2bt - tt$, ob $\partial u = \frac{b \partial t - t \partial t}{\sqrt{(2bt - tt)^2}}$ erit

$$s = \frac{b-t}{\sqrt{(2bt-tt)}} \text{ et } \sqrt{(1+ss)} = \frac{b}{\sqrt{(2bt-tt)^2}}$$

quibus valoribus substitutis habebimus

$$x = +t - \frac{(b-t)\sqrt{(aa-zz)}}{b} \text{ et}$$

$$y = \sqrt{(2bt-tt)} + \frac{\sqrt{(aa-zz)}(2bt-tt)}{b},$$

unde eliminando z erit

$$x\sqrt{(2bt-tt)} + y(b-t) = b\sqrt{(2bt-tt)}.$$

Hinc iam haud difficulter elicitur t; multo autem promptius ex priorae aequatione

$$x = t - \frac{(b-t)\sqrt{(aa-zz)}}{b}; \text{ erit enim}$$

$$t = + \frac{bx + b\sqrt{(aa-zz)}}{b + \sqrt{(aa-zz)}}.$$

Ex altera vero aequatione elicitur

$$\sqrt{(2bt-tt)} = \frac{by}{b + \sqrt{(aa-zz)}}.$$

Ex priori formula colligitur $b-t = \frac{t(b-x)}{b + \sqrt{(aa-zz)}}$; hincque iam penitus expelletur littera t quadratis addendis, scilicet

$$(b-t)^2 + (\sqrt{(2bt-tt)})^2 = bb = \frac{bb[yy + (b-x)^2]}{b + \sqrt{(aa-zz)^2}}, \text{ five}$$

$$(b-x)^2 + yy = bb + 2b\sqrt{(aa-zz)} + aa - zz,$$

quae aequatio ad rationalitatem perducta praebet

$$(xx + yy + zz - 2bx - aa)^2 = 4bb(aa - zz),$$

quae ergo ad quartum gradum exurgit.

§. 6. Maxime autem molestum, atque adeo superfluum foret, pro quavis curva A U talem aequationem rationalem elicere, cum omnia symptomata huiusmodi cylindrorum

in-

incurvatorum facillime ex ipsis formulis principalibus

$$x = t - \frac{s\sqrt{(aa-zz)}}{\sqrt{(1+ss)}} \quad \text{et} \quad y = u + \frac{\sqrt{(aa-zz)}}{\sqrt{(1+ss)}},$$

derivari queant, quemadmodum non ita pridem ostendi, cum omnes superficies investigassem, in quibus omnes normales ad datum planum productae sint inter se aequales. Evidens enim est omnes cylindros incurvatos huic quaestioni satisfacere, dum omnes normales ad eorum superficiem ductae sunt radio circuli genitoris aequales.

Tab. 1. §. 7. Nunc autem istam ideam multo latius extendamus et loco circuli substituamus aliam curvam quamcunque IZG, cuius punctum fixum I simili modo secundum datam illam curvam AU continuo ita promoveatur, ut planum figurae IYZ perpetuo tangenti huius curvae in U normaliter insit. Verum hoc ad motus determinationem nondum sufficit, sed insuper statui oportet, ut istius figurae axis IF perpetuo in plano tabulae conservetur. Quodsi ergo istam figuram loco circuli iuxta curvam datam AU promoveri concipiamus, ubi ad punctum U fuerit perventum, ibi simul punctum I reperietur, et recta IF incidet in ipsam normalem supra definitam UY. Et cum applicata istius figurae YZ iam praebat tertiam nostram coordinatam z, ponamus eius abscissam IY = v, existente YZ = z, ita ut pro hac figura IFG aequatio inter v et z tanquam cognita sit spectanda.

Fig. 1. §. 8. Cum igitur ista figura super curva AU insitum UYZ fuerit translata, ita ut punctum Z in superficie descripta reperiat, cuius situm per ternas coordinatas AX = x; XY = y et YZ = z definiri oporteat, propter in-

intervallum $UY = v$ binæ coordinatæ x et y sequenti modo exprimentur:

$$x = t - \frac{s \cdot v}{\sqrt{(1+s^2)}} \quad \text{et} \quad y = w + \frac{v}{\sqrt{(1+s^2)}}$$

hoc ergo modo corpus generabitur ad axem curvilineum AU referendum, cuius omnes sectiones ad istum axem normaliter factæ ipsi figuræ assumptæ IFG futuræ sint similes et æquales. Omnia igitur corpora hac ratione genita tanquam cylindrica incurvata spectare licebit.

§. 9. Plures insignes proprietates huiusmodi corporum sponte se offerunt ex ipsa generatione. Veluti si quaerantur normales in singulis punctis ad has superficies ductæ, evidens est normalem in figura IFG ad punctum Z ductam simul esse normalem ad superficiem genitam; tum vero etiam tangentes illius figuræ quoque ipsam superficiem tangent. Imprimis autem hic notatu dignum occurrit, quod tam soliditas horum corporum, quam eorum superficies per notissimam regulam Guldini facillime assignari queant, dum scilicet pro soliditate area figuræ IFG , pro superficie vero arcus curvæ IZG per viam a centro gravitatis descriptam multiplicatur. Quoniam enim in hac generatione directio motus perpetuo est ad planum figuræ describentis normalis, regula Guldini sine errore adhiberi potest.

§. 10. Quodsi autem hinc ex ternis coordinatis x , y et z immediate sive soliditatem sive superficiem definire voluerimus, in calculos plane inextricabiles illaberemur, unde nihil plane concludere liceret. Cum enim formula integralis duplicata pro soliditate sit $\iint z \, dx \, dy$, si in ea loco dx et dy valores substituantur, evidens est nul-

lum

lum plane successum inde sperari posse. Multo minus pro superficie expectare licebit, quae posito $\partial z = p \partial x + q \partial y$ hac formula integrali duplicata exprimitur:

$$\iint \partial x \partial y \sqrt{(1 + p p + q q)}.$$

§. 11. Interim tamen totum hoc negotium sequenti modo facillime expedire licebit: Cum pro curva A U detur aequatio inter t et u , ducta normali U N vocetur angulus A N U = Φ , eritque $s = \cot. \Phi$, unde formulae pro x et y erunt: $x = t - v \cos. \Phi$ et $y = u + v \sin. \Phi$. At vero ista normalis U N producatnr usque ad centrum circuli osculatoris O, ita ut recta U O sit radius osculi, quem vocemus r , et cum sit angulus A n u = $\Phi + \partial \Phi$, erit angulus ad O = $\partial \Phi$. Quodsi ergo elementum curvae U u ponamus = ∂w , ut sit $\partial w = \partial t \sqrt{(1 + s s)} = \frac{\partial t}{\sin. \Phi}$, vel etiam $\partial w = \frac{\partial v}{\cos. \Phi}$ erit $r = \frac{\partial w}{\partial \Phi}$.

§. 12. Consideremus nunc seorsim elementum curvae U u = ∂w et producantur radii osculi O U et O u in Y et y, ita ut sit U Y = u y = v, et perpendicularia Y Z = y z = z. Hic scilicet repraesentatur promotio figurae mobilis U Y Z in situm proximum u y z, qua punctum Y transfertur in y per spatium Y y = $\partial w + v \partial \Phi$, quod simul exprimit translationem puncti Z in z, ita ut sit Z z = $\partial w + v \partial \Phi$.

§. 13. His praeparatis investigemus primo soliditatem corporis hoc modo geniti, cuius elementum, dum figura ex U in u promovetur, reperitur, si puncta Y et y in figura mobili promoveantur per spatia Y Y' = y y' = ∂v , atque ele

elementum prismaticum, cuius basis est

$$YyYy' = \partial v (\partial w + v \partial \Phi),$$

et altitudo $YZ = z$, erit $= z \partial v (\partial w + v \partial \Phi)$, cuius integrale, ex sola variabilitate ipsius v , dabit elementum soliditatis quod quaeritur et quod basi $UuYy$ inficit, cuius ergo valor erit $= \partial w \int z \partial v + \partial \Phi \int z v \partial v$, quae integralia a puncto U usque ad terminum figurae extendi debent. Hic autem evidens est formulam $\int z \partial v$ exprimere aream figurae mobilis VYZ , alteram vero formulam $\int z v \partial v$ exprimere momentum eiusdem areae respectu puncti U .

§. 14. Quo haec clariora evadant, consideremus ipsam figuram mobilem UYZ seorsim, cuius centrum gravitatis sit in G , ex quo ad UY demittatur perpendicularum GH , voceturque intervallum $UH = h$, tota autem area figurae describentis vocetur $= H$, ita ut sit $H = \int z \partial v$ et $h = \frac{\int v z \partial v}{\int z \partial v}$. His igitur valoribus substitutis totum incrementum soliditatis, dum figura per spatium Uu promovetur, erit $= H \partial w + H h \partial \Phi = H (\partial w + h \partial \Phi)$; ubi evidens est formulam $\partial w + h \partial \Phi$ exprimere spatium, per quod interea punctum H promovetur; sicque incrementum soliditatis reperitur, si area figurae mobilis, scilicet H , ducatur in viam, per quam interea centrum gravitatis figurae promovetur.

Tab. I.
Fig. 5.

§. 15. Quoniam igitur area figurae per totum motum manet eadem, soliditas totius corporis hoc modo geniti facillime determinatur, dum area figurae describentis per viam ab eius centro gravitatis descriptam multiplicetur; in quo ipso continetur regula iam olim a Guldino in medium

allata. Postmodum autem observatum fuit, istam regulam tuto adhiberi non posse, nisi quovis momento directio motus ad planum figurae fuerit normalis, quemadmodum in casu quem tractamus manifesto usu venit.

Tab. I.
Fig. 6.

§. 16. Dum autem figurae punctum U per lineam curvam AU ita promovetur, uti est praeceptum, punctum H , sive centrum gravitatis figurae, curvam illi parallelam percurrat, quae ex illa formabitur, dum singulae normales OU per intervallum $UH = h$ producuntur. Talis ergo linea curva GH cum ipsa curva AU communem habebit evolutionem, propterea quod ubique punctis U et H idem centrum circuli osculatoris O respondet. Tum vero etiam ex ipso elemento, per quod punctum H promoveri vidimus, quod erit $\partial w + h \partial \Phi$, cognoscimus longitudinem istius curvae $GH = w + h \Phi$, scilicet semper aequatur ipsi curvae $AU = W$, cum arcu circuli radio h descripti, angulo Φ conveniente existente hoc angulo Φ amplitudine curvae propositae.

§. 17. Simili modo superficies corporis hoc motu generati inveniri poterit, quippe cuius incrementum oritur, dum arcus figurae describentis (Fig. 4.) UZ in situm proximum uz promovetur. Hunc in finem statuamus ipsam longitudinem curvae describentis $UZ = q$, ut sit eius elementum $ZZ' = \partial q$, quod cum transferatur in $z.z'$ per spatium $Zz = \partial w + v \partial \Phi$, ista areola erit $= ZzZ'z' = \partial q (\partial w + v \partial \Phi)$ cuius integrale dabit incrementum totius superficiei, quaerimus, sicque hoc incrementum erit $= q \partial w + \partial \Phi \int v \partial q$
ub

ubi integralia per totam figuram describendam sunt extendenda.

§. 18. Quemadmodum igitur in figura (Fig. 5.) UYZ littera q exprimit longitudinem arcus UZ, ita formula $\int v \partial q$ exprimet momentum huius arcus respectu puncti U. Quare si iam centrum gravitatis in G statuamus, hincque in axem UY perpendicularum GH demittamus, posito intervallo GH = h erit $h = \frac{\int v \partial q}{q}$, ideoque incrementum superficiei quaesitum erit = $q(\partial w + h \partial \Phi)$; ubi evidens est formulam $\partial w + h \partial \Phi$ exprimere promotionem centri gravitatis momentaneam.

§. 19. Cum igitur q referat totum arcum curvae describentis, quia perpetuo eiusdem manet quantitatis, per integrationem repetitam colligitur tota superficies hoc motu genita = $q(w + h \Phi)$, ubi $w + h \Phi$ manifesto est tota via a centro gravitatis arcus percurſa, id quod iterum egregie cum regula Guldini convenit.

§. 20. Haecenus quidem assumſimus totam curvam AU, per quam figura promovetur, in eodem plano esse constitutam; verum omnia, quae tam de soliditate quam superficie determinavimus, pariter valent, etiamſi curva directrix AU non in eodem plano versetur, sed per ternas coordinatas AT = t ; TJ = u et UV = v definiri debeat, si modo debita circumſpectio adhibeatur, ut axis figurae, qui erat UY rite quovis momento disponatur, quod facile fieri poterit, si ad illud planum attendamus, in quo bina elementa proxima huius curvae sunt disposita: in hoc enim plano perpetuo axis figurae mobilis dirigi debebit; tum autem ma-

Tab. I.
Fig. 7.

nifestum est totum negotium absolvi posse ut antè, sicque iterum regula Guldini cum opimo successu adhiberi poterit.

§. 21. Neque vero hoc modo promotio figurae penitus determinatur: in locis enim, ubi via centri gravitatis nullam habet curvaturam, positio basis figurae prorsus non determinatur. Hic igitur in subsidium vocari oportet quae in Mechanica de motu progressivo et gyratorio tradi solent; quomodocunque scilicet corpus quodpiam agitatum, eius motus semper resolvi potest in motum progressivum centri gravitatis et motum gyratorium circa quempiam axem per ipsum centrum gravitatis transeuntem.

§. 22. Hoc igitur notato, in nostro casu, quo figura plana promoveri concipitur, motus centri gravitatis semper ita debet esse comparatus, ut eius directio perpetuo ad planum figurae sit normalis; praeterea vero motus gyratorius quovis momento fieri debet circa axem per centrum gravitatis transeuntem, qui simul in ipso plano figurae sit situs. Hoc enim modo evidens est non solum directionem motus centri gravitatis, sed etiam omnium figurae pundorum quovis momento ad ipsam planum figurae fore normalem; quae conditio omnino est necessaria, ut sive soliditas corporis hoc motu geniti, sive eius superficies, secundum regulam Guldini, per productum ex ipsa figura in viam a centro gravitatis percursam rite definiri queat.