EVOLVTIO PROBLEMATIS CVIVS SOLVTIO ANALYTICA EST DIFFICILLIMA, DVM SYNTHETICA PER SE EST OBVIA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 16 Ian. 1777.

1.

Problema, quod hic euoluendum ſuſcipimus, ita ſe habet: *Circa punctum fixum A deſcribere curuam C M, vt ductis ad ſingula puncta M radiis oſculi M R, diſtantia A R vbique ſit eiusdem magnitudinis.* Hic primo ſtatim patet huic problemati ſatisfacere curuam ex euolutione circuli natam, cuius centrum ſit in puncto A, radius vero diſtantiae propoſitae A R aequalis. Deſcripto enim centro A radio A C circulo, ſi peripheriae filum circumplicetur, quod ex C euolutum producat curuam C M, eius radius oſculi in M erit recta M R, circulum in R tangens, ita vt puncti R diſtantia a puncto A vbique ſit eadem. Tab. I. Fig. 1. Fig. 2.

§. 2. Praeterea vero etiam euidens eſt huic problemati omnes ſatisfacere circulos, quocunque radio deſcriptos, quorum centra propoſitam teneant a puncto A diſtantiam. Si enim circa punctum R, cuius diſtantia ab A eſt data, radio quo- Fig. 3.

cunque R C deſcribatur circulus C M, quia eius radius oſculi in M eſt M R, diſtantia praeſcripta A R vtique pro omnibus punctis M eſt eadem. Sicque problema propoſitum duplicem admittit ſolutionem, quarum altera praebet curuas ex euolutione circuli, cuius radius A C datur, natas, altera vero complectitur infinities-infinitos circulos, quorum centra a puncto A datam teneant diſtantiam. Ex quo iam intelligimus, ſolutionem iſtius problematis analyticam ita comparatam eſſe debere, vt ambas ſolutiones memoratas in ſe complectatur.

§. 3. At vero ſolutio analytica haud parum debet eſſe ardua, propterea quod radius oſculi, qui per differentialia ſecundi gradus determinatur, in computum ingreditur. Interim tamen haec ſolutio ſequenti modo commodiſſime inſtitui poſſe videtur. Poſita diſtantia data $AR = a$, pro puncto curvae quocunque M vocetur diſtantia $AM = z$, ductaque ad M tangente M P, in eam ex A demittatur perpendiculum A P, quod vocemus $AP = p$, ac primo quidem quaeramus aequationem inter has binas variabiles $AM = z$ et $AP = p$, quandoquidem hinc deinceps haud difficulter aequatio inter coordinatas ſolitas deduci poteſt. Has autem binas variabiles ideo eligi conuenit, quod ex iis radius oſculi M R ſimpliciſſime exprimi poteſt, ſiquidem habetur $MR = \frac{z\partial z}{\partial p}$, ita vt tantum differentialia primi gradus inuoluat.

Tab. I. Fig. 1.

§. 4. Quod ſi iam ex A ad radium oſculi M R ducatur normalis A Q, quae tangenti M P erit parallela et aequalis, erit quoque $MQ = AP = p$, ideoque $QR = \frac{z\partial z}{\partial p} - p$. Quoniam igitur eſt $AQ = \sqrt{(zz - pp)}$, ob $AR = a$ habebitur iſta aequatio pro curua quaeſita:

$$aa = (zz - pp) + \left(\frac{z\partial z}{\partial p} - p\right)^2, \text{ ſiue}$$

$$aa = zz - pp + \frac{(z\partial z - p\partial p)^2}{\partial p^2}.$$

Quare

Quare si ponamus $zz - pp = tt$, ita vt sit

$$t = \sqrt{(zz - pp)} = MP = AQ,$$

statim habemus hanc aequationem maxime concinnam:

$$aa = tt + \frac{tt\,\partial t^2}{\partial p^2}, \text{ ideoque}$$

$$aa\,\partial p^2 = tt\,(\partial p^2 + \partial t^2),$$

quae duas tantum continet variabiles p et t, vnde elicitur

$$\partial p = \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}.$$

§. 5. Quanquam iam integratio est facillima, antequam eius integrale consideremus, manifestum est huic aequationi differentiali satisfacere valorem $t = a$, quoniam hinc fractionis $\frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}$ tam numerator quam denominator euanescunt. Hoc autem accuratius ita ostendi potest. Quoniam immediate deducti sumus ad hanc aequationem:

$$\partial p\,\sqrt{(aa - tt)} - t\,\partial t = 0,$$

haec ad formam $M\,\partial V = 0$ reducta praebet

$$\sqrt{(aa - tt)}\left(\partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}\right) = 0,$$

ita vt hic sit

$$M = \sqrt{(aa - tt)} \text{ et } \partial V = \partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}},$$

Perspicuum autem est, quoties solutio cuiuspiam problematis deducit ad huiusmodi aequationem differentialem $M\,\partial V = 0$, eam complecti geminam solutionem, alteram $M = 0$, alteram vero $\partial V = 0$, ex qua posteriore demum integrando prodit $V = \text{Const.}$ Neque igitur mirandum est priorem solutionem $M = 0$ non in altera $V = C$ contineri, multoque minus paradoxon videri debet quod saepenumero aequationi differentiali eiusmodi valores satisfacere queant, qui in integrali completo non contineantur.

§. 6. Cum igitur noſtro caſu ſit $M = \sqrt{(aa - tt)}$ et $\partial V = \partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}$, hinc aequatio inuenta duplicem manifeſto inuoluit ſolutionem; ac prior quidem ſtatim ſequitur ex valore $M = \sqrt{(aa - tt)} = 0$, qui dat $t = a$, vnde cum ſit $t = \sqrt{(zz - pp)}$, erit $p = \sqrt{(zz - aa)}$; ex quo perſpicuum eſt in figura interuallum QR euaneſcere, et interuallum AQ eſſe conſtans, quae conditio ſatis clare curuam ex euolutione circuli, cuius radius $= AQ$, natam declarat, quod idem vero etiam analytice ex ipſa aequatione $p = \sqrt{(zz - aa)}$ oſtendi poteſt.

Tab. I. Fig. 4. §. 7. Hunc in finem accipiamus rectam quandam AC pro axe fixo, ac vocemus angulum $CAM = \Phi$, et pro puncto curuae proximo erit $Am = z + \partial z$ et angulus $MAm = \partial \Phi$, ſicque deſcripto centro A arculo Mp erit $mp = \partial z$ et $Mp = z\,\partial\Phi$, vnde elementum curuae naſcitur

$$Mm = \sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)}.$$

Hinc iam ſimilitudo triangulorum mMp et mAP praebet:

$$Mm : Mp = mA : AP = MA : AP, \text{ ſiue}$$

$$\sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)} : z\,\partial\Phi = z : p,$$

vnde fit $p = \frac{zz\,\partial\Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)}}$. Quoniam igitur inuenimus $p = \sqrt{(zz - aa)}$, ſumtis quadratis erit

$$zz - aa = \frac{z^4\,\partial\Phi^2}{\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2},$$

vnde fit $\partial\Phi = \frac{\partial z\sqrt{(zz - aa)}}{az}$, quae formula, ponendo

$$\sqrt{(zz - aa)} = v,$$

ob $zz = aa + vv$, ideoque $\frac{\partial z}{z} = \frac{v\,\partial v}{aa + vv}$, ab irrationalitate liberata praebet $\partial\Phi = \frac{vv\,\partial v}{a(aa + vv)}$, ſiue $\partial\Phi = \frac{\partial v}{a} - \frac{a\,\partial v}{aa + vv}$, vnde integrando colligitur $\Phi = \frac{v}{a} - A\,\text{tang.}\,\frac{v}{a}$.

§. 8. Denotet ω angulum cuius tangens eſt $\frac{v}{a}$, ita vt ſit $v = a\,\text{tang.}\,\omega$, ideoque $z = \frac{a}{\text{cof.}\,\omega}$, hincque porro angu-

lus

lus $\Phi = \text{tang.}\,\omega - \omega$. Ad has formulas construendas centro A, radio $AC = a$, describamus circulum, in quo capiamus $CR = a\,\text{tang.}\,\omega$, cui aequalem sumamus tangentem circuli RM, ita vt sit $RM = a\,\text{tang.}\,\omega$, vnde ducta recta AM, ob $AR = a$ euidens est fore angulum $RAM = \omega$, hincque ipsam rectam $AM = \frac{a}{\cos\omega}$, sicque haec recta AM aequatur nostrae lineae z. Praeterea vero cum sit angulus $CAR = \frac{CR}{CA} = \text{tang.}\,\omega$, si angulus $MAR = \omega$ ab eo subtrahatur, remanebit angulus $CAM = \text{tang.}\,\omega - \omega$, ideoque $CAM = \Phi$, sicque punctum M revera erit in curua quaesita, quam ergo ob $MR = CR$ patet generari ex euolutione arcus circuli CR, quae est prior solutio initio commemorata. Tab. I. Fig. 5.

§. 9. Altera vero solutio petenda est ex aequatione differentiali $\partial V = 0$, siue

$$\partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}} = 0,$$

cuius integrale dat $p + \sqrt{(aa - tt)} = c$. Quia vero est $t = \sqrt{(zz - pp)}$, erit $\sqrt{(aa - tt)} = \sqrt{(aa - zz + pp)}$, sicque aequatio nostra erit: $\sqrt{(aa - zz + pp)} = c - p$; sumtisque quadratis $aa - zz = cc - 2cp$, vnde deducimus

$$p = \frac{cc - aa + zz}{2c}.$$

Modo ante autem vidimus, posito angulo $CAM = \Phi$, esse

$$p = \frac{zz\,\partial\Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)}};$$

quare si breuitatis gratia ponamus $cc - aa = bb$, erit

$$\frac{2czz\,\partial\Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)}} = bb + zz,$$

ex qua aequatione elicitur:

$$\partial\Phi = \frac{(bb + zz)\,\partial z}{z\sqrt{[4cczz - (bb + zz)^2]}},$$

quae aequatio, quantumuis perplexa, tamen praeter circulos

 nullas

nullas alias curuas in ſe complectitur, quod quomodo eueniat nobis eſt oſtendendum.

§. 10. Quo hanc formulam ſimpliciorem reddamus ſimulque litterarum numerum diminuamus, ponamus $zz = bbv$, vt ſit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{2v}$, tum vero ponatur $4cc = (2n+2)bb$, vbi meminiſſe oportet eſſe $bb = cc - aa$, quo facto noſtra aequatio fiet

$$\partial \Phi = \frac{(1+v)\partial v}{2v\sqrt{(2nv - vv - 1)}},$$

quae aequatio commode in duas partes reſoluitur hoc modo:

$$2\partial\Phi = \frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}} + \frac{\partial v}{v\sqrt{(2nv - vv - 1)}},$$

in qua poſteriore parte ſi ponamus $v = \frac{1}{u}$, habebimus hanc aequationem integrandam:

$$2\partial\Phi = \frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}} - \frac{\partial u}{\sqrt{(2nu - uu - 1)}},$$

ſicque ſufficiet altervtram tantum partem integraſſe.

§. 11. Pro priore parte introducamus quempiam angulum θ, ponendo $v = \alpha + \beta \cos.\theta$, et quantitas $2nv - vv - 1$ induet hanc formam:

$$\begin{aligned} &2n\alpha + 2n\beta\cos.\theta - \beta^2\cos.\theta \\ &- \alpha\alpha - 2\alpha\beta\cos.\theta \\ &- 1 \end{aligned}$$

vbi primo termini $\cos.\theta$ inuoluentes tollantur, quod fit ſumendo $\alpha = n$, tum vero ſtatuatur $2\alpha n - \alpha\alpha - 1 = \beta\beta$, vt iſta forma tranſeat in $\beta\beta \sin.\theta^2$. Quia vero eſt $\alpha = n$, altera littera β ex hac aequatione definietur:

$$2nn - nn - 1 = nn - 1 = \beta\beta,$$

ideoque eſt $\beta = \sqrt{(nn-1)}$, atque hinc prior formula $\frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}}$ transmutatur in hanc: $-\partial\theta$, cuius ergo integrale eſt $-\theta$. Cum igitur poſuerimus $v = n + \cos.\theta.\sqrt{(nn-1)}$, erit $\cos.\theta = \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}}$, ideo-

ideoque $\theta = A \text{ cos.} \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}}$. Simili modo erit integrale posterioris partis

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(2nu-uu-1)}} = -A \text{ cos.} \frac{u-n}{\sqrt{(nn-1)}} = -A \text{ cos.} \frac{1-nv}{\sqrt{(nn-1)}},$$

vnde conficitur integrale quaesitum:

$$2\phi = -A \text{ cos.} \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}} + A \text{ cos.} \frac{1-nv}{v\sqrt{(nn-1)}} + C.$$

§. 12. Hinc igitur si priorem arcum, vti fecimus, per θ designemus, posteriorem vero per η, ita vt sit $2\phi = \eta - \theta$, quoniam habemus:

$$\text{cos.}\,\theta = \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}} \text{ et cos.}\,\eta = \frac{1-nv}{v\sqrt{(nn-1)}}, \text{ erit}$$

$$\text{sin.}\,\theta = \frac{\sqrt{(2nv-vv-1)}}{\sqrt{(nn-1)}} \text{ et sin.}\,\eta = \frac{\sqrt{(2nv-vv-1)}}{v\sqrt{(nu-1)}}.$$

Hinc iam cum sit

$$\text{sin.}\,2\phi = \text{sin.}\,\eta \text{ cos.}\,\theta - \text{cos.}\,\eta \text{ sin.}\,\theta \text{ et}$$

$$\text{cos.}\,2\phi = \text{cos.}\,\eta \text{ cos.}\,\theta + \text{sin.}\,\eta \text{ sin.}\,\theta,$$

erit factis substitutionibus:

$$\text{sin.}\,2\phi = \frac{(v-1)\sqrt{(2nv-vv-1)}}{(n-1)v} \text{ et}$$

$$\text{cos.}\,2\phi = \frac{(1+n)v-vv-1}{(n-1)v},$$

atque hinc porro habebimus:

$$1 + \text{cos.}\,2\phi = 2 \text{ cos.}\,\phi^2 = \frac{2nv-vv-1}{(n-1)v} \text{ et}$$

$$1 - \text{cos.}\,2\phi = 2 \text{ sin.}\,\phi^2 = \frac{(v-1)^2}{(n-1)v}.$$

§. 13. Cum nunc sit angulus $CAM = \phi$ et $AM = z$, ob $zz = bbv$, erit $v = \frac{zz}{bb}$; tum vero ducta applicata MX, si vocentur coordinatae $AX = x$ et $XM = y$, erit primo $zz = xx + yy$, tum vero $\text{sin.}\,\phi = \frac{y}{z}$; vnde si isti valores loco ϕ et v substituantur, nanciscemur aequationem inter x et y pro curua quaesita: $\frac{2yy}{zz} = \frac{(zz-bb)^2}{bb(n-1)zz}$, siue reductione facta Tab. I. Fig. 4.

by

$$b y \sqrt{(2n-2)} = z z - b b = x x + y y - b b,$$

quae manifesto est pro circulo. Sumsimus autem

$$4 c c = (2n+2) b b,$$

sicque erit $n = \frac{2cc - bb}{bb}$, ideoque $n - 1 = \frac{2(cc - bb)}{bb}$. Porro autem posueramus $cc - aa = bb$, ita vt sit $cc = aa + bb$ et $n - 1 = \frac{2aa}{bb}$, consequenter $\sqrt{2(n-1)} = \frac{2a}{b}$, vnde aequatio nostra finalis pro curua quaesita erit:

$$2ay = xx + yy - bb,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$xx + (y-a)^2 = bb + aa.$$

§. 14. Ad hanc aequationem construendam ex A ad axem C A erigatur perpendiculum $AI = a$, ductaque axi parallela I O erit $OM = y - a$ et $IO = x$, vnde ducta recta I M erit

Tab. I. Fig. 6.

$$IM^2 = xx + (y-a)^2 = aa + bb,$$

ideoque constans, et quidem pro lubitu accipienda, quia bb est constans arbitraria. Vnde patet, curuam quaesitam esse circulum, radio quocunque circa centrum I descriptum, existente interuallo $AI = a$, quae sola conditio hic est spectanda, vt sit $AI = a$, propterea quod positio axis A C arbitrio nostro relinquitur, id quod etiam calculus ostenderet, si in vltima aequatione integrali $2\Phi = \eta - \theta$ constantem adiecissemus, quippe qua ratione vbique angulus M A C quantitate data fuisset auctus vel minutus, atque hinc discimus, praeter binas solutiones, quas nobis synthesis exhibuit, nullas alias dari curuas quaesito satisfacientes.

Alia

Alia Solutio concinnior eiusdem problematis.

§. 15. Si quis immediate ex binis coordinatis x et y solutionem huius problematis tentare vellet, is in formulas prorsus inextricabiles incideret, in quibus non solum quadrata differentialium secundorum occurrerent, sed etiam haec differentialia cum ipsis coordinatis ac differentialibus primis ita forent permixta, vt nullo modo solutio sperari posset. Sequenti autem modo solutio multo elegantior quam praecedens obtineri poterit, si statim ab initio amplitudo curuae rite in computum ducatur.

§. 16. Ducto igitur, per datum punctum A, axe fixo AB, radium osculi MR secante in N; vocetur angulus $ANM = \phi$, qui amplitudinem arcus AM metietur, siquidem axis AB ad curuam in A fuerit normalis, quae tamen conditio ad solutionem non est necessaria. Vocetur porro interuallum $AN = u$, ac demisso ex A in radium osculi MR perpendiculo AP, erit $AP = u \sin.\phi$ et $NP = u \cos.\phi$. Ponatur autem breuitatis gratia $AP = v = u \sin.\phi$. Eaedem denominationes porro transferantur in radium osculi proximum mr; et quia angulus $Anm = \phi + \partial\phi$, erit angulus $MRm = \partial\phi$, pariter ac angulus PAp; vnde si recta Ap secet radium osculi MR in q, ob $Ap = v + \partial v$, erit $pq = \partial v$ et $Pq = v\partial\phi$. Hinc igitur primo erit $Rq = \frac{\partial v}{\partial\phi} = Rp$. Quodsi insuper vocetur $MP = p$, vt sit $mp = p + \partial p = Mq$, erit manifesto $\partial p = v\partial\phi$, ideoque $p = \int v\partial\phi = MP$. Tab. I. Fig. 7.

§. 17. Cum nunc nostrum problema postulet vt interuallum AR habeat magnitudinem constantem $= a$, triangulum rectangulum APR statim nobis dat hanc aequationem:

$$aa = vv + \frac{\partial v^2}{\partial\phi^2},$$

vnde colligimus istam:

$$\partial \Phi \sqrt{(aa - vv)} = \partial v,$$

quae cum forma generali $M \partial V = 0$ comparata dat

$$M = \sqrt{(aa - vv)} \text{ et } \partial V = \partial \Phi - \frac{\partial v}{\sqrt{(aa - vv)}},$$

vnde manifesto duplex solutio deducitur: Prior scilicet $M = 0$ dat $v = a$, posterior vero $V = C$ praebet $\Phi - A \sin. \frac{v}{a} = C$; neque iam difficile erit hinc ambas solutiones initio commemoratas deducere.

§. 18. Pro priore solutione, qua inuenimus $v = a$, erit interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = 0$, ita vt iam ipsa recta MP futura sit radius osculi, cuius ergo quantitas erit

$$MP = \int v \partial \Phi = a \Phi.$$

Vnde patet, quia punctum P perpetuo eandem distantiam a puncto A seruat, scilicet $AP = a$, euolutam curuae quaesitae esse circulum, centro A, radio $AP = a$ descriptum, atque ipsam rectam $MP = a\Phi$ aequari arcui huius circuli iam euoluto.

§. 19. Pro altera solutione, quae dedit $\Phi - A \sin. \frac{v}{a} = C$, erit $\frac{v}{a} = \sin. (\Phi - C)$; vbi euidens est constantem C tuto negligi posse, propterea quod positio axis assumti AB ab arbitrio nostro pendet, ita vt habeamus $v = a \sin. \Phi$; vnde colligitur primo interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = a \cos. \Phi$, deinde interuallum $MP = -a \cos. \Phi + b$. Hinc ipse radius osculi concluditur $MR = b$, ideoque constans; vnde manifestum est curvam quaesitam hoc casu fore circulum, radio arbitrario $= b$ descriptum, pro cuius positione cum sit $AP = v = u \sin. \Phi = a \sin. \Phi$, hinc fit $u = AN = a$, ita vt punctum N sit fixum adeoque centrum circuli inuenti. Quia enim interuallum

lum $NP = a \cos.\phi$ et $MP = -a \cos.\phi + b$, erit ipsa recta $NM = b$, ideoque punctum R in N incidet.

§. 20. Sin autem constantem illam C praetermittere nolimus, ponamusque $C = \alpha$, habebimus $v = a \sin.(\phi - \alpha)$, hincque interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \phi} = a \cos.(\phi - \alpha)$ et interuallum $MP = -a \cos.(\phi - \alpha) + b$, vnde ipse radius osculi prodit $MR = b$, vt ante. Quoniam porro erat $v = u \sin.\phi$, hinc colligitur $AN = u = \frac{a \sin.(\phi - \alpha)}{\sin.\phi}$, hincque porro

$$NP = u \cos.\phi = \frac{a \sin.(\phi - \alpha).\cos.\phi}{\sin.\phi},$$

cui si addatur $MP = -a \cos.(\phi - \alpha) + b$, erit interuallum

$$NM = -\frac{a \sin.\alpha}{\sin.\phi} + b.$$

Quoniam igitur inuenimus $MR = b$, erit $NR = \frac{a \sin.\alpha}{\sin.\phi}$.

§. 21. Quo haec clariora euadant, ex R in axem AB ducatur normalis RS, et ob angulum $RNS = \phi$, erit

$$RS = a \sin.\alpha \text{ et } NS = \frac{a \sin.\alpha \cos.\phi}{\sin.\phi};$$

ante vero inuenimus

$$AN = u = \frac{a \sin.(\phi - \alpha)}{\sin.\phi},$$

quibus coniunctis prodit interuallum

$$AS = \frac{a \sin.\alpha \cos.\phi + a \sin.(\phi - \alpha)}{\sin.\phi}.$$

Quia vero

$$\sin.(\phi - \alpha) = \sin.\phi \cos.\alpha - \cos.\phi \sin.\alpha,$$

erit hoc interuallum $AS = a \cos.\alpha$; vnde patet punctum R esse fixum, eiusque distantiam $AR = a$, simulque angulum $SAR = \alpha$, quae solutio perfecte conuenit cum praecedente.

Applicatio principii quo Illustris de la Grange geminas huiusmodi Problematum solutiones inter se conciliare est adortus.

§. 22. Quando solutio cuiuspiam problematis deducit ad huiusmodi aequationem differentialem: $M\partial V = 0$, ita vt factor finitus M non pro lubitu, sed ex ipsa indole problematis accesserit; tum manifestum est tale problema admittere duas solutiones, alteram aequatione finita $M = 0$, alteram vero aequatione differentiali $\partial V = 0$ contentam. His igitur casibus nulla plane ratio adest, cur prior harum solutionum in posteriore inuoluta esse debeat, aeque parum ac si problema algebraicum ad aequationem pluribus factoribus constantem perducit, vbi singuli factores seorsim solutiones praebere solent nullo modo a se inuicem dependentes. Neque ergo his casibus principium Ill. de la Grange in vsum vocari poterit.

§. 23. Plerumque autem vsu venire solet, vt factor ille finitus M non aperte in aequationem finalem ingrediatur, sed demum, dum aequatio integrabilis redditur, in subsidium vocari solet, quo casu vtique iste factor arcto vinculo cum ipsa aequatione differentiali cohaeret. Veluti si peruentum fuerit ad huiusmodi aequationem differentialem: $p\partial x + q\partial y = 0$, quae sponte integrationem non admmittat, sed demum per formulam M diuisa integrabilis euadat, tum istam aequationem hoc modo repraesentari conueniet: $M \cdot \frac{p\partial x + q\partial y}{M} = 0$, ita vt hic sit $\partial V = \frac{p\partial x + q\partial y}{M}$, tum vtique duae habebuntur solutiones: altera finita $M = 0$, altera differentialis $\frac{p\partial x + q\partial y}{M} = 0$, ex qua integrando elicitur: $\int \frac{p\partial x + q\partial y}{M} = \text{Const.}$ Hoc ergo casu prior ille factor M ab indole functionum p et q pendet, atque principium memoratum eum in finem excogitatum videtur,

detur, quemadmodum ex aequatione integrali:

$$\int \frac{p\,\partial x + q\,\partial y}{M} = C,$$

altera solutio finita $M = 0$ elici queat.

§. 24. Ad hoc praestandum vir Ill. iubet aequationem integratam, postquam certo modo in ordinem fuerit redacta, denuo differentiare, ita vt etiam constans per integrationem ingressa tanquam variabilis tractetur, quo pacto ad talem aequationem $P\,\partial x + Q\,\partial y + Q\,\partial C = 0$, peruenietur; tum vero coëfficientem ipsius ∂C nihilo aequalem statuit et ex aequatione $R = 0$ valorem ipsius constantis C per ambas variabiles x et y definit, atque affirmat, si iste valor loco C in ipsa aequatione integrali substituatur, tum proditurum esse aequationem illam finitam $M = 0$, sicque hanc aequationem finitam certo modo in aequatione integrali contineri esse censendam; quanquam equidem hanc conclusionem minus perspicio, propterea quod si in aequatione integrata constans vt variabilis tractetur, haec aequatio non amplius pro integrali haberi potest.

§. 25. Applicemus autem hoc principium ad solutionem §. 5. inuentam: $\partial p \sqrt{(aa - tt)} - t\,\partial t = 0$, quae ad hanc formam:

$$\partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}} = 0,$$

reducta et integrata praebet $p + \sqrt{(aa - tt)} = c$, vnde irrationalitatem tollendo prodit: $aa - tt = cc - 2cp + pp$, quae differentiata, spectando etiam c vt variabile, praebet:

$$-2t\,\partial t = 2c\,\partial c - 2c\,\partial p - 2p\,\partial c + 2p\,\partial p,$$

vbi coëfficiens ipsius ∂c est $2(c - p)$, qui nihilo aequatus dat $c = p$. Hic iam valor in aequatione integrata loco c, substitutus dat $p + \sqrt{(aa - tt)} = p$, siue $\sqrt{(aa - tt)} = 0$, quae

 vtique

vtique eſt prior noſtra ſolutio ex factore finito conclusa, ſcilicet $t = a$. Quia autem naturae rei repugnat, conſtanti per integrationem ingreſſae c valorem variabilem p tribui, neutiquam video, quomodo dici queat, ſolutionem illam finitam $t = a$ in aequatione integrali contineri.

§. 26. Deinde etiam nullam rationem perſpicio, cur aequatio integralis, antequam conſtanti c variabilitas tribuitur, ab irrationalitate liberari debeat. Si enim hoc principium immediate applicare vellemus, ipſamque aequationem integralem primo inuentam differentiare, coëfficiens ipſius ∂c foret vnitas, vnde nihil plane ſequeretur. Praetermiſſa autem reductione ad rationalitatem hac ratione quicquid lubuerit concludi poſſet. Si enim aequatio integrata hac forma repraeſentetur:

$$p + q + \sqrt{(aa - tt)} = c + q,$$

ſumtisque vtrinque quadratis differentiatio inſtituatur, coëfficiens ipſius ∂c erit $2(c + q)$, vnde deducitur $c = -q$, qui valor in ipſa aequatione integrali ſubſtitutus daret

$$p + \sqrt{(aa - tt)} = -q,$$

vbi q denotare poſſet functionem quamcunque variabilium p et t. Nemini autem in mentem venire poterit talem ſolutionem problematis admittere.

§. 27. Nullum autem eſt dubium, quia vir Ill. mentem ſuam non ſatis clare expoſuerit, aut quasdam rationes ad intelligendum neceſſarias reticuerit, quas equidem ſupplere non valeo, vnde vberior explicatio ſuper hoc nouo principio, in quo Ill. Auctor adeo inſigne ſupplementum vniuerſi Calculi integralis conſtituit, maxime foret optanda.

PRO-