DE

MOMENTIS VIRIVM

RESPECTV AXIS CVIVSCVNQVE INVENIENDIS;

VBI PLVRA INSIGNIA SYMPTOMATA CIRCA BINAS RECTAS, NON IN EODEM PLANO SITAS, EXPLICANTVR.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 14 *Aug.* 1780.

Si proposita fuerit vis quaecunque V, in directione AZ vrgens, pro eius momento respectu axis az, vtcunque siti, inuestigando praecepta statica hanc suppeditant regulam: *Ex puncto quocunque V, in recta AZ assumto, ducatur ad alteram rectam az perpendicularis Vv, quae vocetur $= v$; deinde quaeratur inclinatio rectae AZ ad planum aVz, quod scilicet tribus punctis a, V, z determinatur, quae inclinatio vocetur $= \Phi$: hincque erit momentum quaesitum $= V.v$* sin. Φ. Scilicet aequabitur producto ex vi sollicitante V in distantiam $Vv = v$, atque insuper in sinum anguli inclinationis Φ. Tab. II. Fig. 1.

Ve-

Verum ſi pro hac formula tam diſtantiam v quam angulum ϕ in genere per calculum definire velimus, in formulas analyticas tantopere intricatas delabimur, vt vix quicquam inde ad vſum mechanicum concludi queat. Cum autem electio puncti V ab arbitrio noſtro pendeat, id ita aſſumere licet, vt pleraeque difficultates memoratae euaneſcant, quod eueniet, ſi punctum V ibi accipiatur, vbi diſtantia inter binas rectas A Z et $a\,z$ (quas ambas in infinitum extendi concipere conuenit) fit minima. Hanc conditionem igitur introducentes totam momentorum inueſtigationem inſtituamus, et more apud Geometras recepto procedamus; vbi, quae proprie ad Mechanicam ſpectant, ab iis quae ad Geometriam ſunt referenda, diſtinguamus.

Theorema geometricum.

Tab. II. Fig. 2. §. 1. *Si recta M m fuerit minima diſtantia inter binas rectas A Z et a z, ea ad vtramque erit normalis, ita vt tam angulus A M m quam angulus a m M ſit rectus.*

Demonſtratio.

§. 2. Si enim angulus Mmz non eſſet rectus, perpendiculum M p, ex M in rectam $a\,z$ demiſſum, minus foret quam M m, contra hypotheſin. Simili modo, ſi recta m M non eſſet perpendicularis ad A Z, ex m eo duci poſſet perpendicularis m P, quae iterum minor foret quam M m, contra hypotheſin. Vnde euidens eſt, diſtantiam minimam M m ad vtramque rectam A Z et $a\,z$ eſſe debere perpendicularem.

Corollarium.

§. 3. Quod ſi per m ipſi A Z ducamus parallelam $\alpha\,\omega$, erit etiam M m perpendicularis ad $\alpha\,\omega$ et perpendicularis ad pla-

planum $a\,m\,\alpha$ vel $\omega\,m\,z$; ſicque recta $m\,z$ ſita erit in plano ad rectam M m normali, atque ſi angulus $a\,m\,\alpha$, ſiue $z\,m\,\omega$ ponatur $= \omega$, iſte angulus metietur inclinationem mutuam binarum rectarum propoſitarum A Z et $a\,z$.

Problema mechanicum.

§. 4. *Cognita diſtantia minima M $m = m$ inter directionem vis ſollicitantis A Z et axem $a\,z$, definire momentum vis V reſpectu axis $a\,z$.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 3.

§. 5. Punctum V ſupra in regula memoratum ſumamus in recta A Z, in ipſo puncto M, vbi diſtantia ab altera recta $a\,z$, ſcilicet M $m = m$, eſt minima. Per M ducatur recta $\alpha\,\omega$, ipſi $a\,z$ parallela, quae ergo cum $a\,z$ in eodem plano iacebit, atque angulus A M α, ſiue Z M ω, qui ſit $= \omega$, exprimet inclinationem rectae A Z ad planum a M z, quam ſupra in regula indicauimus per Φ, quamobrem momentum quaeſitum nunc erit $=$ V m ſin. ω.

Corollarium.

§. 6. Ad momentum igitur vis V, in directione A Z vrgentis, reſpectu axis $a\,z$ inueniendum, primo quaeri debet diſtantia minima inter binas rectas A Z et $a\,z$, quam ponimus M $m = m$. Deinde etiam quaeri debet angulus ω, ſiue inclinatio mutua ambarum rectarum A Z et $a\,z$. Quemadmodum igitur vtramque inueſtigationem inſtitui oporteat doceamus, poſtquam oſtenderimus, quomodo poſitionem vtriusque rectae ad calculum reuocari conueniat.

Problema geometricum.

§. 7. *Positionem ambarum rectarum AZ et az ad calculum reuocare.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 4. §. 8. Hunc in finem in subsidium vocemus ternas directiones fixas inter se normales, ad quas vtriusque rectae positionem per ternas coordinatas, istis directionibus parallelas, referamus. Hinc igitur pro recta AZ constituamus tres axes AF, AG, AH, directionibus illis fixis parallelos, quorum respectu pro puncto quocunque Z statuamus ternas coordinatas istis axibus parallelas $AX = X$, $XY = Y$, et $YZ = Z$, et posito interuallo $AZ = S$, quia ad id ternae coordinatae constantes tenent rationes; ponamus $X = FS$, $Y = GS$, $Z = HS$, vbi cum sit $F = \frac{AX}{AZ}$, euidens est F exprimere cosinum anguli FAZ, quo directio AZ ad axem AF inclinatur. Simili modo G erit cosinus anguli, quo directio AZ ad axem AG inclinatur, et H erit cosinus anguli, quo directio AZ ad axem AH inclinatur. Praeterea vero, cum sit

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = (F^2 + G^2 + H^2) S^2,$$

euidens est semper fore $F^2 + G^2 + H^2 = 1$.

§. 9. Eodem modo pro altera directione az statuantur terni axes af, ag, ah, directionibus fixis paralleli, ad quos positio cuiusvis puncti z referatur per coordinatas $ax = x$, $xy = y$, $yz = z$; et posito interuallo $az = s$, statuatur $x = fs$, $yg = s$ et $zh = s$, vbi, vt ante, litterae f, g, h, exprimunt cosinus angulorum faz, gaz, haz, quibus directio proposita az ad ternos axes af, ag, ah, inclinatur. Tum vero etiam hic habebitur $f^2 + g^2 + h^2 = 1$.

§. 10.

§. 10. Denique quo etiam situs puncti a respectu puncti A in calculum inferatur, ex puncto a in planum F A G demittatur perpendiculum a C, tum vero ex puncto C ad axem A F normalis ducatur C B, ac vocentur interualla $AB = a$, $BC = b$, $Ca = c$, ita vt punctum a quoque per ternas coordinatas a, b, c, determinetur, hocque modo omnia, quae ad relationem inter binas rectas propositas A Z et az pertinent, facillime ad calculum reuocari poterunt.

Problema geometricum.

§. 11. *Propositis duabus rectis A Z et az, earum inclinationem mutuam, quae sit ω, per calculum definire.*

Solutio.

§. 12. Postquam ambae rectae propositae A Z et az per ternas coordinatas, vti modo docuimus, ad calculum fuerint reuocatae, quia omnes rectae inter se parallelae ad quamuis aliam rectam aequaliter inclinantur, ducamus ex A rectam Az', alteri rectae propositae az parallelam, simulque ducantur ternae coordinatae respondentes $Ax' = x$, $x'y' = y$, $y'z' = z$. Haec scilicet figura, vbicunque extiterit recta az, in hunc locum translata concipiatur, atque iam angulus ZAz' erit inclinatio, quam ambae rectae propositae A Z et az inter se tenent. Tab. II. Fig. 5.

§. 13. Quamobrem, quo istum angulum ZAz' commodius definire queamus, ambo interualla A Z et az' inter se aequalia accipiamus, ita vt sit $s = S$, vnde sequentes habebimus valores:

$$AX = X = FS;\ XY = Y = GS;\ YZ = Z = HS;$$
$$Ax' = x = fS;\ x'y' = y = gS;\ y'z' = z = hS.$$

 ex

ex quibus recta $Z z'$ ita definitur, vt fit

$$(Z z')^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2, \text{ siue}$$
$$(Z z')^2 = S\,[(f - F)^2 + (g - G)^2 + (h - H)^2]$$

qua expressione euoluta, ob

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1 \text{ et } F^2 + G^2 + H^2 = 1, \text{ erit}$$
$$(Z z')^2 = 2\,S^2\,(1 - f\,F - g\,G - h\,H).$$

§. 14. Ex Geometria autem constat angulum $Z A z'$ ex datis tribus lateribus ita definiri, vt fit $\cos.\,\omega = \frac{AZ^2 + Az'^2 - Zz'^2}{2\,AZ \times Az'}$, vnde, valoribus substitutis colligitur fore $\cos.\,\omega = fF + gG + hH$, quae expressio satis est simplex, vt in calculum commode introduci queat.

Problema geometricum.

Tab. II. Fig. 4. §. 15. *Propositis duabus rectis AZ et az, prouti ante ad calculum sunt reuocatae, inuestigare puncta Z et z, quorum distantia Zz omnium sit minima.*

Solutio.

§. 16. Quia distantia minima inter binas rectas propositas ad vtramque est normalis, puncta Z et z inde definiri debebunt, vt anguli AZz et azZ fiant recti, siue, si ductae intelligantur rectae Az et aZ, vt fit

$$A z^2 = A Z^2 + Z z^2 \text{ et } a Z^2 = a z^2 + Z z^2,$$

quas ergo aequationes ad calculum reduci oportet. Ante omnia autem ex elementis constitutis interuallum Zz ita exprimitur, vt fit

$$Zz^2 = (a + fs - FS)^2 + (b + gs - GS)^2 + (c + hs - HS)^2,$$

quae

quae expreſſio quo magis contrahatur, ponamus br. gr.

$$aa+bb+cc=\Delta;\ aF+bG+cH=E \text{ et } af+bg+ch=e,$$

ſicque impetrabimus hanc formam:

$$Zz^2=\Delta+2es-2ES-2Ss(Ff+Gg+Hh)+s^2+S^2.$$

Cum igitur, vt modo ante vidimus, ſit $Ff+Gg+Hh=\text{coſ.}\,\omega$, erit

$$Zz^2=\Delta+2es-2ES-2Ss\,\text{coſ.}\,\omega+s^2+S^2.$$

§. 17. Deinde vero has denominationes in ſubſidium vocando reperietur per noſtras coordinatas

$$Az^2=(a+fs)^2+(b+gs)^2+(c+hs)^2,$$

ideoque erit

$$Az^2=\Delta+2es+ss.$$

Simili modo erit

$$aZ^2=(a-FS)^2+(b-GS)^2+(c-HS)^2,$$

adeoque

$$aZ^2=\Delta-2ES+SS.$$

Hinc igitur binae aequationes ſupra datae dabunt has:

$$\Delta+2es+ss=2S^2+\Delta-2ES+2es-2Ss\,\text{coſ.}\,\omega+s^2$$

$$\Delta-2ES+SS=2ss+\Delta-2ES+2es-2Ss\,\text{coſ.}\,\omega+S^2$$

quae ad has formas reducuntur:

$$S-E-s\,\text{coſ.}\,\omega=0$$

$$s+e-S\,\text{coſ.}\,\omega=0.$$

§. 18. Ex his iam duabus aequationibus ſatis ſimplicibus ambo interualla quaeſita $AZ=S$ et $az=s$, ita determinantur, vt ſit

$$S=\frac{E-e\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega^2} \text{ et } s=\frac{E\,\text{coſ.}\,\omega-e}{\text{ſin.}\,\omega^2}$$

Co-

Corollarium.

§. 18. Quodſi ergo interuallis $AZ = S$ et $az = s$ hi valores tribuantur, tum diſtantia Zz omnium euadet minima, ideoque $= m$, quam ergo ſi in calculo retineamus, binae aequationes principales, vnde haec ſolutio eſt deducta, erunt

$$mm + SS = \Delta + 2es + ss,$$

$$mm + ss = \Delta - 2ES + SS,$$

quae duae aequationes additae producent hanc:

$$mm = \Delta + es - ES,$$

quae multo ſimplicior eſt quam ea quae ante immediate fuerat orta, ſcilicet

$$mm = \Delta + 2es - 2ES - 2Ss\cos.\omega + ss + SS,$$

ea igitur in ſequente Problemate vtemur.

Problema geometricum.

§. 19. *Propoſitis duabus rectis AZ et az, per elementa ſupra ſtabilita definitis, inuenire earum diſtantiam minimam.*

Solutio.

§. 20. In Problemate praecedente inuenimus, ſi capiatur

$$AZ = S = \frac{E - e\cos.\omega}{\sin.\omega^2} \text{ et } az = s = \frac{E\cos.\omega - e}{\sin.\omega^2},$$

tum diſtantiam Zz aequari ipſi diſtantiae minimae $= m$. Deinde vero in Corollario oſtendimus eſſe $m^2 = \Delta + es - ES$; quamobrem tantum opus eſt, vt pro litteris Δ, e et E valores aſſumti reſtituantur, qui erant

$$\Delta = aa + bb + cc,$$

$$E = aF + bG + cH$$

$$e = af + bg + ch,$$

vnde

vnde oritur haec aequatio:

$$m^2 \sin.\omega^2 = (aa+bb+cc)\sin.\omega^2 + 2(af+bg+ch)(aF+bG+cH)\cos.\omega$$
$$-(af+bg+ch)^2 - (aF+bG+cH)^2.$$

Manifeſtum igitur eſt facta euolutione talem formam eſſe prodituram:

$$mm \sin.\omega^2 = aa\mathfrak{A} + bb\mathfrak{B} + cc\mathfrak{C} + 2ab\mathfrak{F} + 2bc\mathfrak{G} + 2ac\mathfrak{H},$$

ſicque tantum opus eſt, vt valores litterarum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$, euoluantur.

§. 21. Incipiamus a littera $\mathfrak{A}$, eiusque valor reperitur

$$\mathfrak{A} = \sin.\omega^2 + 2Ff\cos.\omega - F^2 - f^2, \text{ ſiue}$$
$$\mathfrak{A} = 1 - F^2 - f^2 + \cos.\omega(2Ff - \cos.\omega).$$

Hinc iam loco $\cos.\omega$ eius valor $Ff + Gg + Hh$ ſubſtituatur, eritque

$$\mathfrak{A} = 1 - F^2 - f^2 + F^2 f^2 - (Gg + Hh)^2,$$

cuius expreſſionis pars prior manifeſto eſt productum ex factoribus $1 - F^2$ et $1 - f^2$; quare cum ſit

$$1 - F^2 = G^2 + H^2 \text{ et } 1 - f^2 = g^2 + h^2,$$

facta euolutione reperitur

$$\mathfrak{A} = GGhh - 2GHgh + HHgg = (Gh - Hg)^2.$$

Simili modo valores litterarum $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ inueniri poſſent; ſed quia tam litterae a, b, c, quam F, G, H, item f, g, h, eodem ordine procedunt, tantum opus eſt ſingulas litteras pro $\mathfrak{A}$ inuentas vno gradu promouere, vt obtineatur

$$\mathfrak{B} = (Hf - Fh)^2; \text{ atque } \mathfrak{C} = (Fg - Gf)^2,$$

dum denuo vno gradu progreditur.

§. 22. Quaeramus nunc valorem litterae $\mathfrak{F}$, qui ex forma inuenta colligitur fore

$\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F} = (Fg + Gf)\cos.\omega - FG - fg.$$

Hinc ſubſtituto valore pro coſ. ω fiet

$$\mathfrak{F} = (Fg + Gf)(Ff + Gg + Hh) - FG - fg, \text{ ſiue}$$

$$\mathfrak{F} = -FG(1 - ff - gg) - fg(1 - F^2 - G^2) + Hh(Fg + Gf).$$

Quia igitur eſt

$$1 - ff - gg = hh \text{ et } 1 - F^2 - G^2 = H^2, \text{ fiet}$$

$$\mathfrak{F} = Hh(Fg + Gf) - FGhh - fgHH,$$

quod manifeſto eſt productum ex factoribus $Gh - Hg$ et $Hf - Fh$, ita vt ſit

$$\mathfrak{F} = (Gh - Hg)(Hf - Fh).$$

Quod ſi iam vno gradu progrediamur, hinc deducimus valorem

$$\mathfrak{G} = (Hf - Fh)(Fg - Gf)$$

ac denuo progrediendo

$$\mathfrak{H} = (Fg - Gf)(Gh - Hg).$$

§. 23. His igitur colligendis ſequentem aequationem nanciſcemur:

$$\begin{aligned} mm\,\text{ſin.}\,\omega^2 = &(Gh - Hg)^2 aa + 2(Gh - Hg)(Hf - Fh)ab \\ &+ (Hf - Fh)^2 bb + 2(Hf - Fh)(Fg - Gf)bc \\ &+ (Fg - Gf)^2 cc + 2(Fg - Gf)(Gh - Hg)ac \end{aligned}$$

quae expreſſio manifeſto eſt quadratum. Extracta ergo radice orietur:

$$m\,\text{ſin.}\,\omega = (Gh - Hg)a + (Hf - Fh)b + (Fg - Gf)c$$

quae formula etiam negatiue potuiſſet accipi, ſed quia de diſtantia ſermo eſt, ea ſemper poſitiua intelligi ſolet. Quin etiam ſin. ω negatiue ſumi poſſet, quia tantum inclinationis coſinum immediate inuenimus, vnde vna ambiguitas ab altera tolli eſt cenſenda.

Pro-

Problema mechanicum.

§. 24. *Proposita vi quacunque V secundum directionem A Z vrgente, definire eius momentum respectu axis cuiuscunque a z.*

Solutio.

§. 25. Positionem vtriusque directionis A Z et az per eadem elementa exprimi assumamus, quae supra sunt stabilita, scilicet per terna interualla $AB = a$, $BC = b$, $Ca = c$; tum vero per cosinus F, G, H, angulorum, quibus directio A Z ad axes fixos A F, A G, A H, inclinatur, atque insuper per cosinus f, g, h, angulorum, sub quibus altera directio az ad axes fixos af, ag, ah, inclinatur; ex quibus elementis colligitur inclinatio mutua ambarum directionum, qua posita $= \omega$ inuenimus esse $\cos. \omega = Ff + Gg + Hh$. Praeterea vero si m denotet distantiam minimam inter has duas directiones, modo vidimus esse:

$$m \sin. \omega = (Gh - Hg)a + (Hf - Fh)b + (Fg - Gf)h.$$

§. 26. Ex his autem duobus valoribus pro angulo ω et distantia minima m inuentis supra demonstrauimus §. 5. fore momentum quaesitum $= V m \sin. \omega$. Quare, substitutis valoribus modo assignatis, momentum quaesitum hac formula exprimetur:

$$Va(Gh - Hg) + Vb(Hf - Fh) + Vc(Fg - Gf).$$

Corollarium.

§. 27. Expressio ergo pro momento inuenta, praeter ipsam vim propositam V, inuoluit nouem litteras a, b, c; F, G, H; f, g, h; quae autem ad septem reduci possunt, cum sit $F^2 + G^2 + H^2 = 1$ et $f^2 + g^2 + h^2 = 1$. Quia igitur ob tantam multitudinem rationem istius formulae haud facile perspicere licet, haud abs re erit, quosdam casus particulares, quibus directio axis az vel in directionem af, vel ag, vel ah incidit, euoluere.

Casus I. quo directio az incidit in axem af.

§. 28. Hoc igitur casu, ob coordinatas $y=0$ et $z=0$, erit $g=0$ et $h=0$, ideoque $f=1$; tum igitur fiet $\cos.\omega=F$, atque momentum vis propositae respectu axis af erit $V(bH-cG)$.

Casus II. quo directio az incidit in axem ag.

§. 29. Hoc igitur casu binae coordinatae x et z euanescent, eritque ergo $f=0$ et $h=0$, ideoque $g=1$. Inclinatio igitur ad hunc axem determinatur per $\cos.\omega=G$, atque momentum respectu axis ag erit $V(cF-aH)$.

Casus III. quo directio az incidit in axem ah.

§. 30. Hic binae coordinatae x et y euanescunt, eritque idcirco $f=0$ et $g=0$, tum vero $h=1$. Inclinationis, siue anguli ω, cosinus erit $=H$, et momentum quaesitum respectu axis ah fiet $V(aG-bF)$.

Problema mechanicum.

§. 31. *Cognitis tribus momentis, quae vis proposita V, in directione AZ agens, exerit in ternos axes fixos af, ag, ah, inuenire momentum, quod eadem vis respectu axis az producet.*

Solutio.

§. 32. Designemus terna momenta cognita per litteras $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, atque habebimus, vt modo inuenimus

$$\mathfrak{P}=V(bH-cG);$$
$$\mathfrak{Q}=V(cF-aH);$$
$$\mathfrak{R}=V(aG-bF).$$

Iam

Iam vero expressio pro momento respectu axis $a z$ supra inventa etiam hac forma repraesentari potest:

$$V f(b H - c G) + V g(c F - a H) + V b(a G - b F),$$

vbi eaedem formulae occurrunt, quas modo pro momentis $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ dedimus, quibus ergo substitutis momentum respectu axis $a z$ erit $f \mathfrak{P} + g \mathfrak{Q} + b \mathfrak{R}$, vbi non amplius neque positio, neque ipsa vis sollicitans V in calculum ingreditur, vnde sequens Theorema maximi momenti nanciscimur.

Theorema mechanicum.

§. 33. A quibuscunque viribus corpus circa axem $a z$ mobile sollicitetur, si earum virium momenta respectu axium $a f$, $a g$, $a b$ fuerint $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, tum momentum respectu axis propositi $a z$ erit $f \mathfrak{P} + g \mathfrak{Q} + b \mathfrak{R}$, vbi f, g, b, denotant cosinus angulorum $f a z$, $g a z$, $b a z$. Veritas huius Theorematis iam penitus est euicta in Problemate praecedente. Hic autem obseruasse iuuabit terna illa momenta $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ in eundem sensum tendere debere. Scilicet si momentum $\mathfrak{P}$ pro axe $a f$ tendat in plagam $g b$, tum bina reliqua momenta tendere debent in plagas $b f$ et $f g$, siue secundum ordinem harum litterarum, in plagam $f g b$, atque in eandem plagam etiam verget momentum pro axe $a z$ inuentum. Ac si quodpiam horum momentorum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, in plagam contrariam vergat, id in calculo negatiue erit accipiendum.

Corollarium 1.

§. 34. Hinc ergo etiam ista insignis veritas deducitur: *Quaecunque vires respectu ternorum axium $a f$, $a g$, $a b$, inter se normalium eadem praebent momenta, eaedem pro quouis axe obliquo $a z$ paria momenta generabunt.*

Corollarium 2.

§. 35. Momenta igitur virium pro ternis axibus inter se normalibus eodem prorsus modo componi possunt, quo vires simplices componi solent. Si enim puncto a applicatae fuerint vires P, Q, R, secundum directiones af, ag, ah, ex iis componitur vis secundum directionem $az = fP + gQ + hR$, quae egregia harmonia maxima attentione digna est censenda, atque in vniuersam Mechanicam hinc non contemnenda incrementa redundare possunt.