
DE
SINGVLARI RATIONE
DIFFERENTIANDI & INTEGRANDI
QVAE IN SVMMIS SERIERVM OCCVRRIT.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 18 Mart 1776.

§. 1.

Si Σx^n denotet summam progressionis cuius terminus generalis est potestas x^n , ita vt sit

$$\Sigma x^n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \dots + x^n$$

passim expositum reperitur quomodo ex qualibet summa potestatum inferiorum summae superiorum formari queant, dum scilicet singuli termini formulae quae pro Σx^n fuerit inuenta, per certas fractiones multiplicantur, vt hoc modo summa sequentis potestatis Σx^{n+1} obtineatur. Quod quo clarius appareat a potestate infima x^0 continuo ad altiores ascendamus et singulis terminis cuiusque summae subscribamus multiplicatores quibus sequens summa producitur, hoc modo:

$$\Sigma x^0 = x$$

$$\text{Mult. } \frac{1}{2}x, \frac{1}{1}x$$

$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{1}x$$

$$\text{Mult. } \frac{2}{3}x, \frac{2}{2}x, \frac{2}{1}x$$

A 2

Σx^2

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$$

$$\text{Mult. } \frac{3}{4}x, \frac{3}{3}x, \frac{3}{2}x, \frac{3}{1}x$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}xx + *$$

$$\text{Mult. } \frac{4}{3}x, \frac{4}{4}x, \frac{4}{3}x, \frac{4}{2}x, \frac{4}{1}x$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + * - \frac{1}{30}x$$

$$\text{Mult. } \frac{5}{6}x, \frac{5}{5}x, \frac{5}{4}x, \frac{5}{3}x, \frac{5}{2}x, \frac{5}{1}x$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 + * - \frac{1}{12}xx + *$$

$$\text{Mult. } \frac{6}{7}x, \frac{6}{6}x, \frac{6}{5}x, \frac{6}{4}x, \frac{6}{3}x, \frac{6}{2}x, \frac{6}{1}x$$

$$\Sigma x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + * - \frac{1}{2}x^3 + * + \frac{1}{42}x$$

$$\text{Mult. } \frac{7}{8}x, \frac{7}{7}x, \frac{7}{6}x, \frac{7}{5}x, \frac{7}{4}x, \frac{7}{3}x, \frac{7}{2}x, \frac{7}{1}x$$

$$\Sigma x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 + * - \frac{7}{24}x^4 + * + \frac{1}{12}xx + *$$

$$\text{Mult. } \frac{8}{9}x, \frac{8}{8}x, \frac{8}{7}x, \frac{8}{6}x, \frac{8}{5}x, \frac{8}{4}x, \frac{8}{3}x, \frac{8}{2}x, \frac{8}{1}x,$$

$$\Sigma x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 + * - \frac{1}{15}x^5 + * - \frac{2}{9}x^3 + * - \frac{1}{30}x$$

etc.

§. 2. Ex his statim perspicitur, quomodo has operationes ulterius continuari oporteat; tantum notari debet in ultimis terminis cuiusque formulae exceptionem esse statuendam, quippe qui vbique ita determinari debet, ut posito $x = 1$ valor totius expressionis etiam unitati prodeat aequalis. Quoniam enim omnes istae progressionis ab unitate incipiant, manifestum est posito $x = 1$ summam ipsi termino primo aequalem fieri debere, atque ex hoc principio vbique ultimus terminus, qui semper ad potestatem primam x^1 refertur, erit definiendus. Ceterum perspicuum est, hunc terminum vbique fore ultimum, quoniam posito $x = 0$ ipsa summa necessario in nihilum abire debet. Praeterea notandum est loca vacua, ubi coëfficiens est $= 0$, asteriscis * esse completa. Ita in expressione ultima Σx^8 in fine accessit terminus $-\frac{1}{30}x$, quoniam praecedentes omnes iun-

functioni sumti, posito $x = 1$, producant

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} * - \frac{x}{15} * + \frac{x}{9} * = \frac{31}{30} x,$$

unde patet vltimum terminum esse debere $= -\frac{x}{30} x$, vt tota summa euadat $= 1$.

§. 3. Quod si iam istos multiplicatores attentius consideremus, facile perspicitur, ex quolibet termino, per suum multiplicatorem subscriptum multiplicato, idem resultare productum, ac si ipse ille terminus in ∂x ductus integraretur ac per numeratorem fractionis subscriptae multiplicaretur. Quia igitur pro qualibet forma numeratores fractionum subscriptarum sunt aequales, summa sequens prodibit, si praecedens in ∂x ducta integretur simulque per numeratorem respondentem multiplicetur. Ita erit

$$\begin{aligned} \sum x^1 &= 1 \int \partial x \sum x^0, \\ \sum x^2 &= 2 \int \partial x \sum x^1, \\ \sum x^3 &= 3 \int \partial x \sum x^2, \\ \sum x^4 &= 4 \int \partial x \sum x^3, \\ \sum x^5 &= 5 \int \partial x \sum x^4, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

ideoque in genere $\sum x^{n+1} = (n+1) \int \partial x \sum x^n$, si modo quovis casu vltimus terminus rite adiciatur, quippe quem integratio non exhibet, id quod in sequente Problemate ostendemus.

Problema.

§. 4. Cognita summa seriei potestatum cuiusvis exponentis, scilicet

$$\sum x^n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \dots + x^n,$$

invenire summam potestatum vno gradu altiorum, scilicet

$$\sum x^{n+1} = 1^{n+1} + 2^{n+1} + 3^{n+1} + 4^{n+1} + \dots + x^{n+1}.$$

Solutio.

Quoniam summa cognita $\sum x^n$ est certa functio ipsius x , ea ducta in ∂x integretur, vt prodeat $\int \partial x \sum x^n$, quod integrale insuper multiplicatum per $n + 1$ dabit summam quaesitam $\int x^{n+1}$, si modo haec duplex rectificatio rite adhibeatur. Primo enim hoc integrale ita capi debet, vt euanescat posito $x = 0$. Deinde vero insuper eiusmodi terminus formae αx addi debet, ita determinandus, vt posito $x = 1$ ipsa quoque summa quaesita fiat $\sum x^{n+1} = 1$. Ex quo patet istam rationem integrandi penitus ab integrationibus consuetis abhorreere, propterea quod duplicem determinationem postulat, alteram ex casu $x = 0$, alteram ex casu $x = 1$ petendam.

§. 5. Vt igitur istam regulam clarius per exempla illustremus, a simplicissimis incipiamus, et cum esset $\sum x^0 = x$, erit $\int \partial x \sum x^0 = \frac{1}{2} x x$; vnde statuatur $\sum x^1 = 1. \frac{1}{2} x x + \alpha x$, et quia posito $x = 1$ esse debet $\frac{1}{2} + \alpha = 1$, erit vtique $\alpha = \frac{1}{2}$. Deinde erit $\int \partial x \sum x = \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x x$, quam ob rem statui debet $\sum x^2 = 2 (\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x x) + \alpha x$, positoque $x = 1$ fieri debet $2 (\frac{1}{6} + \frac{1}{4}) + \alpha = 1$, vnde reperitur $\alpha = \frac{1}{6}$. Hinc igitur porro erit $\int \partial x \sum x^2 = \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{8} x^3 + \frac{1}{12} x x$, quod integrale per 3 multiplicatum cum adiecto termino vltimo αx dabit

$\sum x^3 = 3 (\frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{8} x^3 + \frac{1}{12} x x) + \alpha x$,

vnde facto $x = 1$ fieri debet $3 (\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}) + \alpha = 1$, vnde fit $\alpha = 0$.

Scholion.

§. 6. Ecce ergo specimen prorsus singulare integrationis hic se nobis offert, quippe quod duplici determinatione indiget, dum solitae integrationes vnicam tantum postulant. Verum hinc etiam in differentiationem singulare Phaenomenon influit: si enim ex qualibet summa $\sum x^{n+1}$, tanquam cognita spectata

spectata, summam praecedentem $\sum x^n$ elicere velimus, id quidem vicissim per differentiationem fieri poterit, cum fiat $\sum x^n = \frac{\partial \cdot \sum x^{n+1}}{(n+1) \partial x}$. Verum hic praeter morem solitum adhuc vna rectificatione est opus, quam ita institui oportet, vt valor hinc resultans euanescat posito $x = 0$, quam operationem in sequente Problemate explicemus:

Problema.

§. 7. *Cognita summa seriei potestatum cuiusuis exponentis*

$$\sum x^n = 1^n + 2^n + 2^n + 4^n + \dots + x^n$$

inuenire summam potestatum vno gradu inferiorum

$$\sum x^{n-1} = 1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + x^{n-1}$$

Solutio.

Cum ex modo allatis pateat esse $\sum x^{n-1} = \frac{\partial \cdot \sum x^n}{n \partial x}$,

euidens est ex cognita summa $\sum x^n$ reperiri summam $\sum x^{n-1}$, si illa differentietur eiusque differentiale per $n \partial x$ diuidatur. Verum hic quoque praeter morem solitum vna rectificatione est opus; quoniam enim omnes istae summae euanescere debent posito $x = 0$, eiusmodi constantem hic adici necesse est, vt formula inuenta euanescat posito $x = 0$, id quod commodissime efficietur, si termini mere constantes, qui forte ex differentiatione prodeunt, statim omittantur.

§. 8. Hanc operationem prorsus singularem quoque aliquot exemplis illustremus. Primo igitur cum sit $\sum x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$, erit eius differentiale $xx \partial x + x \partial x + \frac{1}{2} \partial x$, quod ergo per $2 \partial x$ diuisum, omisso termino ultimo vtpote constante, praebet $\sum x' = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$. Deinde cum sit $\sum x^3$

==

$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}xx$, eius differentiale erit $x^3 \partial x + \frac{3}{2}xx \partial x + \frac{1}{2}x \partial x$, quod per $3 \partial x$ diuisum, quoniam nullus terminus constans adest, sine vlla correctione praebebit $\Sigma x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$.

Scholion.

§. 9. En igitur aliud simile specimen differentiationis hic occurrit, quod a more solito in hoc recedit, vt etiam differentiale correctione indigeat, dum integratio ante propofita duplicem requirebat, ob quam circumstantiam ambae istae operationes prorsus singulares omni attentione dignae videntur, idque eo magis, quod haecenus ex folis obseruationibus per inductionem sunt deriuatae; quamobrem maxime necessarium videtur, has operationes solida demonstratione corroborare.

Demonstratio operationum supra expositarum.

§. 10. Ex iis quae olim de summatione omnium progressionum, atque imprimis potestatum tradidi, valor formulae Σx^n in genere sequenti modo expressus deducitur:

$$x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{1}{2} x^n + \frac{n}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{5} x^{n-3} \\ + \frac{n \cdot \dots \cdot (n-4)}{2 \cdot \dots \cdot 6} \cdot \frac{1}{6} x^{n-5} - \frac{n \cdot \dots \cdot (n-6)}{2 \cdot \dots \cdot 8} \cdot \frac{3}{10} x^{n-7} + \text{etc.}$$

Quod si ergo hanc formam per $(n+1) \partial x$ multiplicemus & integremus, obtinebitur sequens expressio:

$$\frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{1}{2} x^{n+1} + \frac{(n+1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} x^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{2 \cdot \dots \cdot 5} \cdot \frac{1}{5} x^{n-2} \\ + \frac{(n+1)n(n-1) \cdot (n-3)}{2 \cdot \dots \cdot 7} \cdot \frac{1}{7} x^{n-4} - \frac{(n+1)n(n-1) \cdot (n-5)}{2 \cdot \dots \cdot 9} \cdot \frac{3}{10} x^{n-6} \\ + \frac{(n+1)n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-7)}{2 \cdot \dots \cdot 11} \cdot \frac{5}{7} x^{n-8} + \text{etc.}$$

quae

quae a praecedente aliter non discrepat, nisi quod numerus n unitate fit auctus, ea igitur verum valorem summae $\sum x^{n+1}$ exprimit.

§. 11. Quod autem nunc ad duplicem correctionem supra memoratam attinet, primo quidem patet in ipsa expressione $\sum x^n$ perpetuo terminum constantem, qui ibi ingrederetur, penitus esse omittendum, id quod semper usu venit, quoties n est numerus impar, propterea quod per ipsam rei naturam summa semper evanescere debet posito $x = 0$. Ita si esset $n = 3$, omitti debet terminus $-\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6} \cdot x^0$. Quando autem sumimus integrale, huius termini ratio utique erit habenda, quoniam inde oritur $-\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4x = -\frac{1}{36}x$, quem ergo terminum in summa sequente $\sum x^{n-1}$, utique addi oportet, etiamsi non per integrationem sit erutus. Cum autem constet posito $x = 1$ summam semper primo termino, qui est 1, aequari debere, ex hac conditione iste terminus ∂x tutissime definietur, sine subsidio formae generalis.

§. 12. Hinc igitur ratio est manifesta, cur huiusmodi integrationes duplicem rectificationem postulent, quarum scilicet altera efficiendum est ut summa inuenta evanescat casu $x = 0$; tum vero etiam ut casu $x = 1$ ipsa unitati aequalis prodeat. Atque hinc simul intelligitur ratio, cur in differentiatione, quoties ad terminos constantes pervenitur, eos praetermitti oporteat. Ceterum tales operationes per differentiationem et integrationem procedentes non solum in seriebus potestatum locum habent, sed etiam ad omnis generis progressionem extendi possunt, quemadmodum in sequenti Problemate ostendetur.

Problema.

§. 13. Si fuerit X functio quaecunque ipsius x atque seriei, cuius terminus generalis $= X$, existente x indice termini ultimi, cognita fuerit summa $= \sum X$, inuenire summam seriei cuius terminus generalis $= \frac{\partial X}{\partial x}$.

Solutio.

Ex cognito termino generali X olim ostendi terminum summatorium ita exprimi, vt fit

$$\sum X = \int X \partial x + \frac{1}{2} X + \frac{A}{1.2.3} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{B}{1. . . 5} \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{C}{1. . . 7} \cdot \frac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

vbi litterae A, B, C, D , etc. denotant numeros vulgo Bernoullianos dictos:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}; \frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{5}{8}, \frac{69}{210}, \frac{35}{2}, \text{etc.}$$

Quod si iam pro altera serie, cuius terminus generalis proponitur $\frac{\partial X}{\partial x}$, loco X scribamus $\frac{\partial X}{\partial x}$, quia tum $\int X \partial x$ abit in X et singula differentialia ipsius X vno gradu euehuntur, prodibit istius seriei summa:

$$\sum \frac{\partial X}{\partial x} = X + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{A}{1.2.3} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{B}{1. . . 5} \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{C}{1. . . 7} \cdot \frac{\partial^6 X}{\partial x^6} - \text{etc.}$$

quae manifesto ex forma praecedente oritur, si illa differentietur ac per ∂x diuidatur, ita vt fit $\sum \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial \cdot \sum X}{\partial x}$. Verum cum natura omnium summationum postulet, vt enascente terminorum numero x , etiam ipsae fiant nihilo aequales, istam aequationem ita referri conueniet: $\sum \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial \cdot \sum X}{\partial x} + C$, quam scilicet constantem C ita accipi oportet, vt summa quaesita $\sum \frac{\partial X}{\partial x}$ euascat posito $x = 0$, quod plerumque commodissime fiet, si, quando differentiatio formulae $\sum X$ terminos constantes praebet, ii omitantur.

Corollarium.

§. 14. Hinc igitur patet signum summationis \sum simili modo ad signum differentiationis ∂ referri posse, quo signum

gnum integrationis \int . Quemadmodum enim est $\int \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial \cdot f x \partial x}{\partial x}$, ita videmus etiam esse $\sum \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial \cdot \sum x}{\partial x}$. Hic autem conditionem memoratam, adiectione constantis C contentam, neutiquam obliuisci oportet, quippe qua ingens discrimen inter huiusmodi relationes constituitur.

Exemplum 1.

§. 15. Ponamus terminum generalem seriei propositae esse $\frac{1}{x(x+1)}$, ita vt series proposita sit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{xx+x},$$

cuius terminus summatorius est $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, ita vt sit $\sum \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1}$. Nunc autem erit $\frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{(1+2x)}{(xx+x)^2}$, vnde nascitur ista series:

$$-\frac{3}{4} - \frac{5}{36} - \frac{7}{144} - \frac{9}{400} \dots - \frac{(2x+1)}{(xx+x)^2}.$$

Huius igitur seriei terminus summatorius erit

$$\frac{1}{\partial x} \partial \cdot \frac{x}{1+x} + C = \frac{1}{(1+x)^2} + C,$$

quae formula cum euanescere debeat posito $x=0$, sumi debet $C = -1$, ita vt summa desiderata iam sit $-\frac{(2x+xx)}{(1+x)^2}$. Patet autem hinc sumto $x=1$ fore summam $= -\frac{3}{4}$, hoc est ipsi primo termino aequalem; sumto autem $x=2$ fore summam $= -\frac{8}{9}$, quae est aggregatum termini primi et secundi. At sumto $x=3$ fit summa $= -\frac{15}{12}$; aggregatum vero trium priorum terminorum est $-\frac{8}{9} - \frac{7}{144} = -\frac{135}{324} = -\frac{15}{18}$.

Exemplum 2.

§. 16. Sit proposita ipsa series ad quam in praecedente exemplo peruenimus:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} \dots + \frac{2x+1}{(xx+x)^2},$$

vbi ergo est $X = \frac{x+1}{(xx+x)^2}$, eius vero summam vidimus esse $\frac{x+x}{(x+1)^2}$. Hinc igitur erit $\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{x-6x-6xx}{(xx+x)^3}$, vnde nascitur haec series: $-\frac{1}{8} - \frac{38}{216} - \frac{74}{1728} - \text{etc.}$ cuius ergo summa erit

$$\frac{1}{\partial x} \partial . \Sigma X = \frac{1}{\partial x} \partial . \frac{x+x}{(x+1)^2} + C = \frac{2}{(x+1)^3} + C,$$

vbi igitur sumi debet $C = -2$, ita vt summa desiderata fit

$$\frac{-6x-6xx-2x^3}{(1+x)^3} = \Sigma \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Sumamus igitur $x = 1$ ac prodibit primus terminus $= -\frac{1}{8}$. Sin autem capiatur $x = 2$, erit aggregatum primi et secundi termini $= \frac{52}{27}$. At sumto $x = 3$ prodit $-\frac{126}{64} = -\frac{63}{32}$; summa autem trium primorum erit $-\frac{52}{27} - \frac{74}{1728} = -\frac{63}{92}$.

Scholion.

§. 17. Haec exempla ita sunt assumpta, vt ex termino generali summa per formam supra exhibitam non aliter nisi per seriem infinitam elici potuisset. Si enim poneremus $X = \frac{1}{xx+x}$, hinc primo deduceremus $fX \partial x = \frac{x}{1+x}$, differentialia vero nunquam euanescerent, ita vt inde vera summa, quae aliunde constat, deduci non posset. Huiusmodi autem exempla innumerabilia facillime formari possunt, dum ipse terminus summatorius pro lubitu assumitur. Si enim in genere terminus summatorius statuatur $= S$, functio quaecunque ipsius indicis x , tum si in eo loco x scribatur $x-1$, summa illa prodire debet vltimo termino minuta, vnde vltimus, hoc est terminus generalis seriei obtinebitur, si a summa S subtrahatur eius valor qui prodit si loco x scribatur $x-1$. Ita in primo exemplo erat $S = \frac{x}{1+x}$, quae expressio, loco x scribendo $x-1$, abit in $\frac{x-1}{x}$, quae fractio a priore ablata relinquit $\frac{1}{x(x+1)}$; qui est terminus generalis nostrae seriei. Hinc igitur perspiciatur veritatem solutionis nostri problematis neququam pendere

a forma, qua summam expressimus, sed potius in ipsa natura summationis esse fundatam, id quod etiam de sequente Problemate valebit.

Problema.

§. 18. Si cognita fuerit summa seriei, cuius terminus generalis $= X$, functio quaecunque indicis x , inuenire summam seriei cuius terminus generalis $= fX \cdot \partial x$.

Solutio.

Cum igitur terminus generalis seriei propositae sit $= X$, eius summa supra cognita habetur, eritque ut ante

$$\Sigma X = fX \partial x + \frac{1}{2} X + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{B}{1 \cdot \dots \cdot 5} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{C}{1 \cdot \dots \cdot 7} \cdot \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} \text{ etc.}$$

Hinc igitur deducimus summam quaesitam $\Sigma fX \partial x$, si in illa expressione loco X vbique scribamus $fX \partial x$, quo facto reperiemus :

$$\Sigma fX \partial x = f \partial x fX \partial x + \frac{1}{2} fX \partial x + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot X - \frac{B}{1 \cdot \dots \cdot 5} \cdot \frac{\partial \partial X}{\partial x^2} + \frac{C}{1 \cdot \dots \cdot 7} \cdot \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} \text{ etc.}$$

quae series manifesto ex illa formatur, si ea ducta in ∂x integretur, ita ut sit $\Sigma fX \partial x = f \partial x \Sigma X$. Verum hic duplex rectificatio accedere debet, altera ut summa quaesita euanescat posito $x = 0$, altera vero ut posito $x = 1$ summa exhibeat ipsum terminum primum seriei, qui erit valor formulae $fX \partial x$, sumto $x = 1$, quamobrem vera expressio pro summa quaesita erit

$$\Sigma fX \partial x = f \partial x \Sigma X + C + D x,$$

vbi ambas constantes C et D per memoratas condiciones definire oportet.

Corollarium.

§. 19. Hinc igitur patet signum summationis Σ simili indole gaudere, qua signum integrationis, atque adeo haec signa

inter se permutari posse, cum sit Σf aequivalens $f \Sigma$. Hic autem probe meminisse oportet, duplicem rectificationem insuper esse adiungendam.

Exemplum.

§. 20. Sit proposita progressio numerorum pentagonalium 1, 5, 12, 22, $\frac{3xx-x}{2}$, ita ut sit $X = \frac{3xx-x}{2}$. Hinc cum sit $fX \partial x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}xx$, tum vero $\frac{\partial X}{\partial x} = 3x - \frac{1}{2}$ et $\frac{\partial \partial X}{\partial x^2} = 3$, sequentia vero differentialia = 0, hinc obtinetur

$$\begin{aligned} \Sigma X &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}xx, + \frac{3}{4}xx - \frac{1}{4}x, + \frac{1}{12}(3x - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}xx. \end{aligned}$$

Hinc iam formetur nova series, cuius terminus generalis

$$= fX \partial x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}xx + \frac{1}{2},$$

unde nascitur haec series:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{17}{4} \text{ etc. } \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}.$$

Eius igitur summa erit

$$\Sigma fX \partial x = f \partial x \Sigma X + C + D x.$$

Iam vero ob $\Sigma X = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}xx$, erit $f \partial x \Sigma X = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^3$, ideoque summa quaesita = $\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + C + D x$, quae ut evanescat sumto $x = 0$, fieri debet $C = 0$; at ut posito $x = 1$ prodeat primus terminus $\frac{3}{4}$, sumi debet $D = \frac{11}{24}$, ita ut vera summa sit $\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{11}{24}x$. Ita si sumamus $x = 2$, prodit $\frac{17}{4}$, quae est summa termini primi et secundi.

Scholion.

§. 21. Ex his facile intelligitur, tam differentiationem quam integrationem pro lubitu ulterius continuari posse, id quod breuiter sequentibus duobus Theorematibus sum complexurus.

Theo-

Theorema I.

§. 22. Si termino generali X, qui scilicet indici x conueniat, respondeat terminus summatorius S; tum sequentes summationes inde deriuantur:

- I. Termino generali $\frac{\partial x}{\partial x}$ conueniet summatorius $= \frac{\partial S}{\partial x} + A$;
- II. Termino generali $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ conueniet summatorius $= \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + A$;
- III. Termino generali $\frac{\partial^3 x}{\partial x^3}$ conueniet summatorius $= \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + A$.

etc.

vbi littera A designat quantitatem constantem inde definiendam, vt hae summae euanescant posito $x = 0$.

Theorema II.

§. 23. Si termino generali X conueniat terminus summatorius S, sequentes summationes quoque locum habebunt:

- I. Termino generali $\int X \partial x$ respondebit summatorius $\int S \partial x + A + Bx$;
- II. Termino generali $\int \partial x \int X \partial x$ respondebit summatorius $\int \partial x \int S \partial x + A + Bx + Cx^2$;
- III. Termino generali $\int \partial x \int \partial x \int X \partial x$ respondebit summatorius $\int \partial x \int \partial x \int S \partial x + A + Bx + Cx^2 + Dx^3$;

etc.

vbi litteras constantes A, B, C, D, etc. ita definiiri oportet, vt casibus $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc. satisfiat, scilicet, vt posito $x = 0$ ipsa summa euanescat; posito vero $x = 1$ vt prodeat terminus primus; tum vt posito $x = 2$ prodeat summa primi et secundi; et vt posito $x = 3$ prodeat summa primi secundi et tertii, et ita porro. Semper autem praestabit quamlibet summam ex immediate praecedente definire, quoniam tum tantum duae constantes A et B prodeunt, quas facillime ex casibus $x = 0$ et $x = 1$ definire licet.