DE TRIBVS NVMERIS QVADRATIS, QVORVM TAM SVMMA, QVAM SVMMA PRODVCTORVM EX BINIS SIT QVADRATVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In Tomo nouorum Commentariorum VIII. tractaui Problema, quo tres numeri quaeruntur, quorum tam summa, quam summa productorum ex binis, vna cum producto omnium fiant quadrata, cuius Solutio cum non solum esset difficillima, sed etiam ad immensos numeros perduxisset, merito videri poterat, si insuper noua conditio adderetur, solutionem vires Analyseos penitus esse superaturam. Hoc tamen euenit in quaestione, quam hic tractabo, vbi praeter tres conditiones memoratas etiam haec postulatur, vt singuli numeri quaesiti sint quadrati. Interim tamen hac conditione adiecta, post plures conatus irritos, tandem modum inueni istud Problema satis commode resoluendi, vbi adeo numeros satis modicos assignare licet Problemati satisfacientes.

§. 2.

§. 2. Sint xx, yy, zz, terni numeri quadrati quaesiti; ita vt esse debeat,

$$\text{I. } xx + yy + zz = \square.$$

$$\text{II. } xxyy + xxzz + yyzz = \square,$$

quarum conditionum priori satisfiet, sumendo

$$x = pp + qq - rr; \; y = 2pr \text{ et } z = 2qr;$$

tum enim erit,

$$xx + yy + zz = (pp + qq + rr)^2,$$

vnde si ponamus $xx + yy + zz = P^2$, sumtis $x = pp + qq - rr$, $y = 2pr$, $z = 2qr$, fiet $P = pp + qq + rr$.

§. 3. Progrediamur nunc ad alteram conditionem, quae postulat, vt sit

$$xx(yy + zz) + zzyy = Q^2;$$

quare cum sit

$$yy + zz = 4rr(pp + qq),$$

hinc orietur ista aequatio:

$$Q^2 = 4rr(pp + qq)(pp + qq - rr)^2 + 16ppqqr^4,$$

quae diuisa per factorem quadratum $4rr$ dabit

$$\frac{QQ}{4rr} = (pp + qq)(pp + qq - rr)^2 + 4ppqqrr,$$

quam ergo formulam quadratum reddi oportet. Ea autem euoluta literae p et q ad sextam potestatem ascendent, litera vero r tantum ad quartam, quae ergo commode inuestigari posse videtur, siquidem casus sponte patet, scilicet si $rr = pp + qq$, dummodo fuerit $pp + qq$ quadratum. Interim tamen hinc ne vnicam quidem aliam solutionem deriuare licet; vnde negotium prorsus alio modo aggredi opor-

oportet, quod ſequenti modo egregio ſucceſſu praeſtari poterit.

§. 4. Pono autem $r = p - nq$, ita vt hoc modo nulla reſtrictio inferatur, quoniam loco literae r noua indeterminata n introducitur; tum autem noſtra aequatio hanc induet formam:

$$\frac{QQ}{4(p-nq)^2} = (pp+qq)(2npq+(1-nn)qq)^2 - 4ppqq(p-nq)^2,$$

quae iam diuidi poteſt per qq, ita vt

$$\frac{QQ}{4qq(p-nq)^2} = (pp+qq)(2np+(1-nn)q)^2 + 4pp(p-nq)^2,$$

quod quadratum breuitatis gratia deſignemus per R^2, ita vt ſit $Q = 2q(p-nq)R$. Nunc igitur facta euolutione prodibit haec aequatio:

$$R^2 = 4(1+nn)p^4 - 4n(1+nn)p^3q + (1+6nn+n^4)ppqq$$
$$+ 4n(1-nn)pq^3 + (1-nn)^2q^4,$$

in qua formula poſtremum membrum euaſit quadratum; primum vero membrum reddi poſſet quadratum, faciendo $nn+1 = \Box$; at vero ad ſolutionem ſufficere poteſt, vt poſtremus tantum terminus ſit quadratum.

§. 5. Pro R^2 eiusmodi quadratum ſtatuamus, quo ſublato tres vltimi termini e medio tollantur, et ex duobus prioribus relictis ratio inter p et q determinetur. Hunc in finem ſtatuatur

$$R = (1-nn)qq + 2npq + \alpha pp,$$

et α ita determinetur, vt etiam antepenultimus auferatur, quod fit ſumendo $\alpha = \frac{1+2nn+n^4}{2(1-nn)}$, quo facto aequatio relicta erit:

$4p^4$

$$4p^4 - 4np^3q = \frac{(1+nn)^3}{4(1-nn)^2}p^4 + \frac{2n(1+nn)}{1-nn}p^3q,$$

siue per $4(1-nn)^2$ multiplicando, per p^3 diuidendo et literas p et q ad eandem partem transferendo fiet,

$$(15 - 35nn + 13n^4 - n^6)p = 8n(1-nn)(3-nn)q,$$

quae aequatio porro per $3-nn$ diuidi poteſt, quo facto fit $(5 - 10nn + n^4)p = 8n(1-nn)q$, vnde deducitur

$$\frac{p}{q} = \frac{8n(1-nn)}{5-10nn+n^4}.$$

§. 6. Sumamus igitur, vt huic aequationi ſatisfiat, $q = 5 - 10nn + n^4$ et $p = 8n(1-nn)$, ex quibus valoribus colligitur

$$r = p - nq = n(3 + 2nn - n^4).$$

Praeterea vero his valoribus ſubſtitutis inuenimus

$$R = (1-nn)((5-10nn+n^4)^2 + 16nn(5-10nn+n^4) + 32(1+nn)^2).$$

Inuentis autem his valoribus ipſi numeri quaeſiti ita formabuntur, vt ſit

$$x = pp + qq - rr;\; y = 2pr;\; z = 2qr.$$

Ope harum formularum igitur aliquot exempla euolvamus.

Exemplum I.

§. 7. Sit $n = 2$, eritque $p = -48$; $q = -19$; $r = 10$, vnde fit $R = 7035$. Erat autem

$$Q = 2qrR = 4.5^2.19.1407.$$

Hinc vero ipſi numeri quaeſiti ita ſe habebunt:

$$x = 2565;\; y = 2.10.48;\; z = 2.10.19.$$

Quoniam autem hi numeri communem diuiſorem habent 5, per eius diuiſionem deprimi poterunt, ſimulque numerus P quinquies euadet minor, at vero Q vicies quinquies minor, hocque modo ſolutio ſequentibus valoribus continebitur:

$$P = 553;\ Q = 106932;\ x = 513;\ y = 192;\ z = 76.$$

Quadrata iam numerorum x, y, z eiusmodi erunt numeri, qui Problemati olim tractato ſatisfacient. Tales igitur numeri erunt,

$$x^2 = 263169;\ y^2 = 36864;\ z^2 = 5776,$$

qui numeri ſunt incomparabiliter minores iis, quos loco citato exhibui; vnde intelligitur, methodum, qua tum temporis ſum vſus, non ſatis eſſe accommodatam. Summa autem horum trium numerorum eſt $= 553^2$; ſumma productorum ex binis $= 35948^2$ et productum omnium $= 513^2 . 192^2 . 76^2$.

Exemplum II.

§. 8. Sit $n = 3$, eritque

$$p = -8.24 = -192;\ q = -4;\ r = -180,$$

qui numeri per -4 depreſſi euadent

$$p = 48;\ q = 1;\ r = 45;\ \text{vnde fit}$$

$$R = 14120,\ \text{hincque}\ Q = 18.25.2824.$$

Hinc vero ipſi numeri quaeſiti erunt

$$x = 280;\ y = 90.48;\ z = 90,$$

ſiue deprimendo per 10 fiet

$$x = 28;\ y = 432;\ z = 9;\ P = 433;\ Q = 12708,$$

qui numeri adhuc praecedentibus ſunt minores, ideoque minimi

minimi omnium esse videntur qui satisfaciant. Quadrata ergo horum numerorum, quae sunt

$$x^2 = 784;\; y^2 = 186624;\; z^2 = 81,$$

erunt sine dubio minimi Problemati olim tractato satisfacientes, quippe quorum summa est 433^2; summa quadratorum ex binis $= 12708^2$ et productum omnium $28^2 . 432^2 . 9^2$.

Exemplum III.

§. 9. Sit $n = \frac{1}{2}$, fietque $p = 3$; $q = \frac{41}{16}$; $r = \frac{55}{32}$, siue, ductis his omnibus numeris in 32, fiet $p = 9$; $q = 82$; $r = 55$; vnde fit

$$R = 22515 \text{ et } Q = 2 . 82 . 55 . 22515.$$

Tum vero erit

$$x = 12915;\; y = 2 . 55 . 96;\; z = 2 . 55 . 82,$$

qui numeri per 5 deprimi possunt, quo facto fit

$$x = 2583;\; y = 2112;\; z = 1804, \text{ siue}$$

$$x = 3 . 7 . 123;\; y = 3 . 11 . 64;\; z = 4 . 11 . 41,$$

§. 10. Haec omnia ex formulae biquadraticae §. 4. allatae prima resolutione sunt deducta. Constat autem methodus, qua ex qualibet resolutione iam inuenta plures nouae deriuari possunt; verum hoc modo ad formulas nimis complicatas perueniretur, quod negotium hic non suscipio: praecipue enim in talibus inuestigationibus id solet intendi, vt solutiones saltem simpliciores eruantur.

 Euolu-

Euolutio casuum.

quibus est $nn+1$ quadratum.

§. 11. Sit igitur $nn+1=mm$, quod euenit, quoties fuerit $n=\frac{aa-bb}{2ab}$; tum enim erit $m=\frac{aa+bb}{2ab}$, quo obseruato retineamus in calculo literas m et n, eritque aequatio resoluenda,

$$R^2=4mmp^4-4nmmp^3q+(m^4+4nn)ppqq$$
$$+4n(1-nn)pq^3+(1-nn)^2q^4,$$

vbi iam tam primus quam vltimus terminus sunt quadrata, ideoque praeter operationem praecedentem tres adhuc respectu primi termini institui poterunt, quas ergo ordine prosequemur.

§. 12. Primo igitur ponatur

Operat. I. $$R=2mpp-nmpq+(1-nn)qq$$

vbi notetur, numerum m tam positiue quam negatiue accipi posse, vnde ergo gemina solutio nascetur. Huius ergo valoris pro R quadrato a superiore expressione pro R^2 sublato orietur sequens aequatio:

$$\frac{p}{q}=\frac{4n+2mn-2mn^3-4n^3}{4m-4mnn+mmnn-4nn-m^4},$$

siue ob $nn=mm-1$ erit

$$\frac{p}{q}=\frac{2n(4+2m-2mm-m^3)}{4+8m-5mm-4m^3}.$$

§. 13. Quoniam literae m et n semper sunt fractiones, quo eae facilius tollantur, introducamus multiplicatorem indefinitum Δ ponamusque

$$p=2\Delta n(4+2m-2mm-m^3) \text{ et}$$
$$q=\Delta(4+8m-5mm-4m^3),$$

vnde

vnde ob $r = p - nq$ fiet

$$r = \Delta n(4 - 4m + mm + 2m^3).$$

§. 14. His igitur tribus valoribus inuentis numeri quaesiti x, y, z ita ex iis determinantur, vt fit

$$x = pp + qq - rr;\; y = 2pr;\; z = 2qr.$$

Praeterea vero erit

$$P = pp - qq + rr;\; Q = 2qrR,$$

existente

$$R = 2mpp - mnpq + (1 - nn)qq.$$

§. 15. Vnicum exemplum euoluamus, vt pateat, num hinc minores numeri sint prodituri quam ante. Sumamus igitur $a = 2$ et $b = 1$, fietque

$n = \frac{3}{4}$ et $m = \pm \frac{5}{4}$, hincque fiet

$$p = \tfrac{3}{2}\Delta(4 \pm \tfrac{5}{2} - \tfrac{25}{8} \mp \tfrac{125}{64}),\; q = \Delta(4 \pm 10 - \tfrac{125}{16} \mp \tfrac{125}{16})$$

siue

$p = \frac{3}{2}\Delta(\frac{7}{8} \pm \frac{35}{64})$ et $q = \Delta(-\frac{61}{16} \pm \frac{35}{16})$.

Sumamus $\Delta = 128$, fietque

$$p = 3(56 \pm 35)\; q = 8(-61 \pm 35),$$

hincque

$$r = p - \tfrac{3}{4}q = 3(178 \mp 35.$$

Valeat signum superius, quoniam hoc casu numeri resultantes per 13 deprimi possunt, quo facto reperitur:

$$p = 3\cdot 7 = 21;\; q = -2.8 = -16;\; r = 3.11 = 33,$$

vnde colligimus:

$$x = -392;\; y = 1386;\; z = -1056,$$

qui

qui denuo, reiectis fignis, per 2 deprimuntur, ita vt

$$x = 196;\ y = 693;\ z = 528.$$

Supra autem iam multo minores numeros nacti fumus.

Operat. II. §. 16. Vt praeter primum terminum etiam duo vltimi tollantur ftatuamus:

$$R = 2\,m\,p\,p + 2\,n\,p\,q + (1 - n\,n)\,q\,q;$$

vnde orietur fequens aequatio:

$$\frac{p}{q} = \frac{4\,m - 4\,m\,n\,n - m^4}{4\,m\,n\,(2 + m)},\ \text{fiue}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{8 - 4\,m\,m - m^3}{4\,n\,(2 + m)}\ (\text{ob}\ n\,n = m\,m - 1),$$

fiue etiam

$$\frac{p}{q} = \frac{(2 + m)\,(4 - 2\,m - m\,m)}{4\,n\,(2 + m)} = \frac{4 - 2\,m - m\,m}{4\,n};$$

Fiat vt fupra

$$p = \Delta\,(4 - 2\,m - m\,m)\ \text{et}\ q = 4\,\Delta\,n,$$

hincque erit

$$r = p - n\,q = \Delta\,(8 - 2\,m - 5\,m\,m);$$

denique

$$x = p\,p + q\,q - r\,r;\ y = 2\,p\,r;\ z = 2\,q\,r;$$

$$P = p\,p + q\,q + r\,r\ \text{et}\ Q = 2\,q\,r\,R,$$

exiftente

$$R = 2\,m\,p\,p + 2\,n\,p\,q + (1 - n\,n)\,q\,q.$$

§ 17. Sumamus iterum, quo res exemplo illuftretur, $n = \frac{3}{4}$, ideoque $m = \pm \frac{5}{4}$, fietque,

$$p = \Delta\,(\tfrac{39}{16} \mp \tfrac{5}{2})\ \text{et}\ q = 3\,\Delta.$$

Sumatur $\Delta = 16$, et figno fuperiore valente erit $p = -1$ et et $q = 48$; hinc fit $r = -37$, vnde numeri quaesiti prodeunt

$$x = 936;\ y = 74;\ z = 3552,$$

siue deprimendo

$$x = 468;\ y = 37;\ z = 1776,$$

qui praecedentibus adhuc maiores sunt.

§. 18. Tollamus nunc tres terminos priores, ponendo Operat. III.

$$R = 2mpp - mnpq + \frac{m^4 + 3nn}{4m} qq,$$

ex quo haec resultat aequatio:

$$g\left(\frac{(m^4 + 3nn)^2}{16mm} - (1 - nn)^2\right) = -\frac{n}{2}(m^4 - 5nn + 8)p.$$

Ex hac autem forma iam satis manifestum est, nullos numeros minores, Problemati satisfacientes, elici posse; quamobrem vlteriore euolutione supersedemus.

AD