

omnis generis tibiae, quae Organis pneumaticis inferi solent, figuram habeant vel cylindricam vel prismaticam, ut amplitudo vbique sit eadem, haecque sola figura ad Musicam accommodata videtur; quod quidem duplici modo fieri licet, dum eae superne vel apertae sunt, vel clauduntur. At si tibias hyperbolicas claudere velimus, soni multo rudiores edentur, quia tum neutra scala seorsim considerata motum oscillatorium regularem producere valet; ex quo operae pretium haud erit casum, quo tubus hyperbolicus in altero termino apertus in altero vero clausus fumeretur, euolui.

## CAPVT VI.

DE

### MINIMIS AERIS AGITATIONIBVS IN TVBIS CONICIS.

#### Problema 92.

128. Si tubus habuerit figuram conicam, aequae in eo contentus vtcunque de statu aequilibrii deturbetur, describere ambas scalas, ex quibus deinceps status aeris ad quoduis tempus definiri queat.

Solutio.

Solutio.

Sit vertex conii in A et recta AB eius axis, Tab. IX. in quo sumto puncto quocunque S, positoque inter-  
 vallo AS = S, aëri in S initio eiusmodi inductus Fig. 103.  
 fit status, vt densitas fuerit = Q naturali existente  
 = B celeritas vero in directione AB = Y. Cum  
 nunc tubi amplitudo in S sit  $\Omega = nnSS$  ex (88)  
 ad hunc casum accommodato habebimus  $\alpha = 1, \xi = 0,$   
 hincque  $M = \frac{-1}{S}$  et  $L = \frac{1}{S^2}$ . Quodsi iam solutio-  
 nem probl. 84. huc transferamus, et grauitatis actio-  
 nem negligamus, obtinebimus primo

$$O = \frac{1}{SS} \int S S dS l \frac{Q}{B},$$

tum vero elapso tempore quocunque t status aeris,  
 qui initio fuerat in S ita definitur vt sit spatium  
 translationis

$$S_s = \frac{1}{SS} \int S S dS l \frac{Q}{B} - \frac{1}{S} \Gamma^I : (S+ct) + \frac{1}{SS} \Gamma : (S+ct) = v$$

$$- \frac{1}{S} \Delta^I : (S-ct) + \frac{1}{SS} \Delta : (S-ct)$$

unde pro densitate q et celeritate v deducimus:

$$\left(\frac{d v}{d s}\right) = \frac{-2}{S^2} \int S S dS l \frac{Q}{B} - \frac{1}{S} \Gamma^{II} : (S+ct) + \frac{2}{SS} \Gamma^I : (S+ct) - \frac{2}{S^2} \Gamma : (S+ct)$$

$$+ l \frac{Q}{B} - \frac{1}{S} \Delta^{II} : (S-ct) + \frac{2}{SS} \Delta^I : (S-ct) - \frac{2}{S^2} \Delta : (S-ct)$$

ab ob  $\frac{d \Omega}{\Omega d s} = \frac{2}{S}$  est

$$\frac{v d \Omega}{\Omega d s} = \frac{2}{S^2} \int S S dS l \frac{Q}{B} - \frac{2}{SS} \Gamma^I : (S+ct) + \frac{2}{SS} \Gamma : (S+ct)$$

$$- \frac{2}{SS} \Delta^I : (S-ct) + \frac{2}{SS} \Delta : (S-ct)$$

quare cum sit  $q = Q \left(1 - \frac{v d \Omega}{\Omega d s} - \left(\frac{d v}{d s}\right)\right)$  colligimus

$$q = Q \left(1 - l \frac{Q}{B} + \frac{1}{S} \Gamma^{II} : (S+ct) + \frac{1}{S} \Delta^{II} : (S-ct)\right)$$

ac denique ob  $v = \left(\frac{dv}{dt}\right)$  erit

$$v = -\frac{c}{s} \Gamma'' : (S+ct) + \frac{c}{s^2} \Gamma' : (S+ct) \\ + \frac{c}{s} \Delta'' : (S-ct) - \frac{c}{s^2} \Delta' : (S-ct).$$

Hinc ergo pro flatu initiali ponendo  $t = 0$  adificimur :

$$v = \frac{1}{s^2} \int SS dS l_{\frac{0}{B}} - \frac{1}{s} (\Gamma' : S + \Delta' : S) + \frac{1}{s^2} (\Gamma : S + \Delta : S) \\ q = Q \left( 1 - l_{\frac{0}{B}} + \frac{1}{s} (\Gamma'' : S + \Delta'' : S) \right) \\ v = -\frac{c}{s} (\Gamma'' : S - \Delta'' : S) + \frac{c}{s^2} (\Gamma' : S - \Delta' : S).$$

Cum igitur tum fuerit  $v = 0$ ,  $q = Q$  et  $v = Y$ , sequentes nanciscimur aequationes ex quibus naturam binarum functionum  $\Gamma$  et  $\Delta$  definiri oportet

$$\text{I. } \int SS dS l_{\frac{0}{B}} - S(\Gamma' : S + \Delta' : S) + \Gamma : S + \Delta : S = 0$$

$$\text{II. } S l_{\frac{0}{B}} = \Gamma'' : S + \Delta'' : S$$

$$\text{III. } \frac{1}{s} SS Y = -S(\Gamma'' : S - \Delta'' : S) + \Gamma' : S - \Delta' : S$$

quarum prima differentiata cum secunda conuenit, uti quidem rei natura postulat, ita ut duabus tantum conditionibus sit satisfaciendum. Ponamus breuitatis gratia :

$$\Gamma' : S + \Delta' : S = y \text{ et } \Gamma' : S - \Delta' : S = z \text{ ut fiat}$$

$$\text{II. } S dS l_{\frac{0}{B}} = dy \text{ et III. } \frac{1}{s} SS Y dS = -S dz + z dS$$

hincque

$$y = \int S dS l_{\frac{0}{B}} \text{ et } -\frac{z}{s} = \frac{1}{s} \int Y dS \text{ feu } z = -\frac{s}{c} \int Y dS$$

vnde

unde functiones ita definiuntur, vt fit:

$$\Gamma': S = \frac{1}{2} \int S \, dS \, l \frac{Q}{B} - \frac{S}{2c} \int \Upsilon \, dS \text{ et}$$

$$\Delta': S = \frac{1}{2} \int S \, dS \, l \frac{Q}{B} + \frac{S}{2c} \int \Upsilon \, dS$$

hincque porro differentiando

$$\Gamma'': S = \frac{1}{2} S \, l \frac{Q}{B} - \frac{1}{2c} \int \Upsilon \, dS - \frac{1}{2c} S \Upsilon$$

$$\Delta'': S = \frac{1}{2} S \, l \frac{Q}{B} + \frac{1}{2c} \int \Upsilon \, dS + \frac{1}{2c} S \Upsilon$$

integrando vero reperitur:

$$\Gamma: S = \frac{1}{2} \int S \, dS \, l \frac{Q}{B} - \frac{1}{2} \int S S \, dS \, l \frac{Q}{B} - \frac{1}{4c} S S \int \Upsilon \, dS + \frac{1}{4c} \int S S \Upsilon \, dS$$

$$\Delta: S = \frac{1}{2} \int S \, dS \, l \frac{Q}{B} - \frac{1}{2} \int S S \, dS \, l \frac{Q}{B} + \frac{1}{4c} S S \int \Upsilon \, dS - \frac{1}{4c} \int S S \Upsilon \, dS.$$

Construantur ergo super axe ex dato flatu initiali duae lineae curvae A Q D et A Y F sumendo applicatas

$$S Q = S \, l \frac{Q}{B} \text{ et } S Y = \frac{1}{c} \int \Upsilon \, dS + \frac{1}{c} S \Upsilon$$

et functionum  $\Gamma$  et  $\Delta$  natura inde ita determinabitur vt fit

$$\Gamma'': S = \frac{1}{2} S Q - \frac{1}{2} S Y; \quad \Delta'': S = \frac{1}{2} S Q + \frac{1}{2} S Y$$

hincque porro per areas

$$\Gamma': S = \frac{1}{2} A S Q - \frac{1}{2} A S Y; \quad \Delta': S = \frac{1}{2} A S Q + \frac{1}{2} A S Y$$

tum vero si haec forma  $M : A S Q$  denotet eam quantitatem quae exprimit integrale  $\int dS \cdot A S Q$  habebitur:

$$\Gamma: S = + \frac{1}{2} M : A S Q - \frac{1}{2} M : A S Y$$

$$\Delta: S = + \frac{1}{2} M : A S Q + \frac{1}{2} M : A S Y.$$

His curuis descriptis post tempus elapsum  $= t$ , a puncto S vtrunque abscindantur intervalla  $ST = St = ct$  et ex applicatis his punctis respondentibus status aeris qui initio ad S versabatur nunc ita definitur, vt fit

$$q = Q \left( 1 - \frac{SQ}{S} + \frac{1}{2S} (TM - TN + tm + tn) \right)$$

$$s = \frac{c}{2S} (tm + tn - TM + TN) + \frac{c}{2SS} (ATM - ATN - Atm - Atn)$$

at spatiolum translationis  $Ss = v$  ita exprimetur:

$$Ss = \frac{1}{SS} \int SS dSl \frac{Q}{B} - \frac{1}{2S} (ATM - ATN + Atm + Atn)$$

$$+ \frac{1}{2SS} (M : ATM - M : ATN)$$

$$+ \frac{1}{2SS} (M : Atm + M : Atn) \quad \text{feu}$$

$$Ss = \frac{1}{SS} \int SS dSl \frac{Q}{B} - \frac{1}{2S} (ATM - ATN + Atm + Atn) + \frac{1}{2SS}$$

$$(M : ATM - M : ATN + M : Atm + M : Atn)$$

$$\text{vbi est } \int SS dSl \frac{Q}{B} = \int S.SQ. dS = S. ASQ - M : ASQ$$

### Coroll. I.

128. Ad quoduis ergo tempus  $t$  sumtis intervallis  $ST = St = ct$  aeris qui initio erat in S status ita definitur vt fit

$$\text{I. densitas } q = Q \left( 1 + \frac{1}{2S} (TM + tm - 2SQ) - \frac{1}{2S} (TN - tn) \right)$$

$$\text{II. celeritas } s = \frac{c}{2S} (tm - TM) + \frac{c}{2S} (TN + tn) + \frac{c}{2SS} tm TM - \frac{c}{2SS} (ATN + Atn)$$

$$\text{III. spatiolum } Ss = \frac{1}{2S} (2ASQ - ATM - Atm) + \frac{1}{2S} tn TN$$

$$- \frac{1}{2SS} (2M : ASQ - M : ATM - M : Atm) - \frac{1}{2SS} (M : ATN - M : Atn)$$

Coroll.

## Coroll. 2.

129. Si distantia  $AS$  consideretur vt infinita, tubus conicus abibit in cylindricum; et quia tum fit

$$\frac{1}{S} SQ = l \frac{Q}{B}, \quad \frac{1}{S} SY = \frac{T}{c}; \quad \frac{1}{S} ASQ = \int dS l \frac{Q}{B},$$

ideoque

$$\frac{1}{S^2} ASQ = 0; \quad \text{at } \frac{1}{S^2} M: ASQ = \int dS l \frac{Q}{B}$$

tum vero  $\frac{1}{S} ASY = \frac{1}{c} \int T dS$  hinc

$$\frac{1}{S^2} ASY = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{S^2} M: ASY = \frac{1}{c} \int Y dS,$$

hae formulae cum illis, quae supra pro tubus cylindricis sunt inuentae, conuenient.

## Scholion 1.

130. Constructio prioris scalae  $AQD$ , ex densitate initiali formatae nulli est subiecta difficultati, at altera scala  $AYF$  non simpliciter ex celeritatibus initialibus  $Y$  construitur, sed insuper formulam quandam integram inuoluit, quemadmodum ergo hinc eam construi oporteat, perpendamus. Descripta ergo linea curua  $A \nu C$  cuius applicatae  $S \nu$  ipsam celeritatem initialem  $Y$  in loco  $S$  exhibeant, ex ea scala illa  $AYF$  ita construitur, vt fit eius applicata  $SY = \frac{1}{c} AS \cdot S \nu + \frac{1}{c} AS \nu$  tum vero erit huius curuae area  $ASY = \frac{1}{c} AS \cdot AS \nu$ , cum fit vt vidimus  $\int dS (YS + \int Y dS) = S \int Y dS$ . Hanc ergo curuam  $A \nu C$  loco illius introducendo, habebimus

T N =

$$TN = \frac{1}{c} AT \cdot TL + \frac{1}{c} ATL;$$

$$tn = \frac{1}{c} At \cdot tl + \frac{1}{c} Atl$$

$$ATN = \frac{1}{c} AT \cdot ATL; \quad Atn = \frac{1}{c} At \cdot Atl$$

unde fit pro formula celeritatum

$$v = \frac{c}{2S} (tm - TM) + \frac{c}{2SS} \cdot tm \cdot TM + \frac{1}{2S} (AT \cdot TL + At \cdot tl) - \frac{ct}{2SS} \cdot TL \cdot tl$$

$$\text{ob } ST = S t = c t$$

Atque hinc iam perspicitur, si per totum spatium  $Tt$  tam densitas initialis fuerit naturalis, quam celeritas nulla, tum etiam fore  $q = Q$  et  $v = 0$ , quod posterius ex formula priori minus, perspicitur. Si enim intra spatium  $At$  initio fuerit motus, et curua  $A v C$  ibi incluserit aream quandam, etiamsi deinceps haec curua tota in axem incidat, haec area praebit applicatas pro curua  $ATF$  etiam per totum axem sequentem  $tT$ , unde neque areae  $ATN$  et  $Atn$  neque applicatae  $TN$  et  $tn$  evanescent: sicque dubium foret, utrum forma

$$\frac{c}{2S} (TN + tn) - \frac{c}{2SS} (ATN + Atn)$$

hoc casu evanesceret; quod autem nunc quidem scala  $A v C$  in calculum introducta necessario euenire debere intelligitur.

### Scholion 2.

131. Loco indicis  $M$ , quem supra areis praefiximus, ut scriptio  $M: A S Q$  denotet integrale  $\int dS. ASQ$  commodius signo summatorio  $\int$  utemur,

vt  $\int A S Q$  idem denotet, quod  $\int dS. A S Q$ , quoniam differentiale abscissae  $dS$  facile mente suppletur. Hoc praemisso etiam pro scala  $A Y F$  loco  $M: A S Y$  scribam  $\int A S Y$  quae forma autem ex scala celeritatum naturali  $A v C$  ita determinatur vt fit

$$\int A S Y = \frac{1}{c} (A S \int A S v - \int \int A S v)$$

ideoque

$$M: A T N = \frac{1}{c} (A T \int A T L - \int \int A T L)$$

$$M: A t n = \frac{1}{c} (A t \int A t l - \int \int A t l)$$

Quare per scalam densitatum  $A Q D$  et celeritatum  $A v C$  nostrae determinationes ita se habebunt

$$q = Q \left( 1 + \frac{1}{2cS} (TM + tm - 2SQ) - \frac{1}{2cS} (AT.TL - At.tl + tl.TL) \right)$$

$$s = \frac{c}{2S} (tm - TM) + \frac{c}{2S} TM tm + \frac{1}{2S} (AT.TL + At.tl) - \frac{S T}{2S^2} t l TL$$

$$Ss = \frac{1}{2S} (SQ tm - SQT M) - \frac{1}{2S^2} (\int SQ tm - \int SQT M)$$

$$+ \frac{1}{2cS} (A T. A T L - A t. A t l) - \frac{1}{2cS^2} (A T. \int A T L - A t. \int A t l - \int \int t l TL)$$

quae ad vsum magis videntur accommodatae.

### Problema 93.

132. Si in tubo conico  $A B b$  in infinitum Tab. IX; extenso alicubi per spatium minimum  $G H$  pulsus Fig. 104. excitetur, propagationem huius pulsus in tubo versus  $B b$  ortam determinare.

### Solutio.

Cum pulsus in spatulo  $G H$  contineatur, in utroque termino  $G$  et  $H$  densitatem naturalem et  
 Tom. XVI. Nou. Comm. Fff cele-

celeritatem nullam esse oportet. Sit igitur  $GH$  scala celeritatum, cuius applicata  $tl$  celeritatem ipsam initialem in loco  $t$  exprimat vt fit  $tl = Y$  directione ad  $B$  versa: pro scala densitatum  $GmH$  vero applicata  $tm = A t \cdot l \frac{Q}{B}$  denotante  $Q$  densitatem in  $t$  initialem, et  $B$  naturalem. His positis consideremus locum tubi quemcunque  $S$ ; existente  $AS = S$  et quia ambae scalae extra spatium  $GH$  in axem incidunt, aër in  $S$  tam diu in aequilibrio perseverabit, quoad ab initio effluxerit tempus  $= \frac{SH}{c}$  min. sec. elapso autem tempore  $\frac{SG}{c}$  pulsus iterum cessasse est existimandus ita vt totus pulsus ibi nonnisi per tempus  $\frac{GH}{c}$  fit duraturus. Ponamus ergo ab initio elapsum esse tempus  $t = \frac{St}{c}$ , et quia ad alteram partem  $B$  versus aequali spatio  $ST = St$  abscisso ibi ambae applicatae  $TL$  et  $TM$  evanescent, densitas aeris  $q$  et celeritas  $v$  versus  $B$  tendens in loco  $S$  ita exprimentur:

$$q = B \left( 1 + \frac{tm}{2S} + \frac{At \cdot tl}{2cS} - \frac{Htl}{2cS} \right)$$

quia initio densitas in  $S$  erat  $= B$ , tum vero erit:

$$v = \frac{c \cdot tm}{2S} + \frac{c \cdot Htm}{2SS} + \frac{At \cdot tl}{2S} - \frac{St \cdot Htl}{2SS}$$

Cum autem intervallum  $GH$  minimum assumatur, areae  $Htl$  et  $Htm$  pro evanescentibus haberi possunt; quare ob  $tl = Y$  et

$$tm = A t l \frac{Q}{B} = A t \left( \frac{Q}{B} - 1 \right) \text{ habebimus:}$$

$$q = B \left( 1 + \frac{At}{2AS} \left( \frac{Q}{B} - 1 \right) + \frac{At \cdot T}{2c \cdot AS} \right) \text{ seu } \frac{q}{B} = \frac{At}{2AS} \left( \frac{Q}{B} + \frac{T}{c} \right)$$

$$v = \frac{c \cdot At}{2AS} \left( \frac{Q}{B} - 1 \right) + \frac{At \cdot T}{2AS} = \frac{c \cdot At}{2AS} \left( \frac{Q}{B} + \frac{T}{c} \right).$$

Coroll.

## Coroll. 1.

133. Si areolas  $Ht$  et  $Htm$  negligere nolumus, habebimus

$$l \frac{g}{B} = \frac{At}{2AS} \left( l \frac{Q}{B} + \frac{T}{c} \right) - \frac{ar.Htl}{2c.AS} \text{ et}$$

$$v = \frac{c.At}{2AS} \left( l \frac{Q}{B} + \frac{T}{c} \right) + \frac{c}{2AS^2} \left( Ar.Htm - \frac{st}{c} Ar.Htl \right)$$

vbi  $\frac{st}{c}$  denotat tempus ab initio elapsum  $t$  in min. sec. expressum.

## Coroll. 2.

134. Areas autem has eo minus negligere licet, quo maius spatium  $GH$ , et quo propius fuerit vertici conii  $A$  quoniam tum ob  $t = T$ , area  $Htl$  prae rectangulo  $At.tl$  neutiquam pro evanescente haberi potest.

## Coroll. 3.

135. Si tempus elapsum  $t$  maius fuerit quam  $\frac{sc}{c}$ , ita vt punctum  $t$  ultra  $G$  versus  $A$  cadat, vbi initio erat  $l \frac{Q}{B} = 0$  et  $T = 0$ ; pro loco  $S$  adhuc erit:

$$l \frac{g}{B} = - \frac{Ar.GlH}{2.c.AS} \text{ et } v = \frac{c}{2AS^2} (Ar.GmH - t.G/H)$$

tum ergo neque densitas est naturalis neque motus penitus extinctus.

## Scholion.

136. Omnino singulare est hoc phaenomenon, quod etiamsi pulsus in  $S$  iam cessauisse est aestimandus

dus tamen aeris aequilibrium nondum prorsus sit re-  
 stitutum, sed fieri possit ut etiamnum tam densitas  
 $q$  a naturali  $B$  discrepet, quam aer ipse motu quo-  
 dam proferatur. Discrimen quidem hoc in valde  
 magnis distantis  $A S$  ut nullum spectari potest; in  
 minoribus vero eo magis est notatu dignum, quod  
 perpetuo durare videatur. cum calculus nullam porro  
 mutationem indicet. Verum hic observari oportet,  
 nostras scalas hic non ultra verticem  $A$  porrigi, ea-  
 rumque continuationem ex altera parte ipsius  $A$  si-  
 milem pulsum  $GH$  ad parem distantiam implicare,  
 quo si tempus  $St$  pertigerit in  $S$  novus pulsus se-  
 cundarius excitetur, quo finito demum aer ad  $S$   
 prorsus in aequilibrium restituatur. Hic enim simi-  
 lis repetitio oriri debet ac si tubus esset cylindricus  
 et in  $A$  clausus: nunc autem videmus hoc discrimen  
 intercedere, quod in casu tubi conici interea-  
 dum pulsus secundarius ad  $S$  appellit, aerem ibi  
 quandam adhuc agitationem retinere secus ac fit in  
 cylindricis. Quare quemadmodum ambae scalae ultra  
 conii verticem continuari debeant in sequente Problemate  
 inuestigabimus.

### Problema 94.

Tab. IX. 137. Si circa verticem conii  $A$  aer utcumque  
 Fig. 105. de statu aequilibrum deturbetur seu pulsus ibi quicun-  
 que excitetur scalas ambas quibus ad propagationem  
 definiendam opus est, retro ultra verticem  $A$  con-  
 tinuare, indeque propagationem in tubo pro quovis  
 loco  $S$  determinare.

Solutio.

## Solutio.

Extendatur pulsus primo excitatus per spatium  $AD$ , et in loco quocunque  $T$  posito intervallo  $AT = S$ , fuerit densitas aeris  $= Q$  naturali existente  $= B$ , celeritas vero  $= T$  secundum directionem  $AB$  hinc construatur primo curva  $AMD$  sumendo applicatas  $TM = S \frac{Q}{B}$ , quae ergo ultra  $D$  in ipsam axem  $DB$  incidit. Deinde construatur etiam curva  $ANF$  sumendo applicatas  $TN = \frac{ST + \int T ds}{c}$ , cuius quidem primum membrum in  $D$  ubi  $Y = 0$  evanescit, alterum vero  $\frac{1}{c} \int T ds$  ibi certum valorem adipiscetur, cui sequentes applicatae omnes versus  $B$  erunt aequales, ita ut haec scala  $ANF$  ultra  $F$  abeat in rectam  $FG$  ipsi axi  $AB$  parallelam; et area huius curvae ita definietur ut sit  $ATN = \frac{S}{c} \int T ds$ : unde cum puncto  $T$  in  $D$  promotum fiat applicata  $DF = \frac{1}{c} \int Y ds$ , erit area  $ADF = AD \cdot DF$  perinde ac si tota scala  $ANFG$  esset recta  $GF$  ipsi axi parallela et supra verticem  $A$  vsque continuata. His positis primo quaeritur quomodo has scalas ultra  $A$  continuari oporteat, ubi ante omnia est observandum aerem in ipso vertice  $A$  nullum plane motum concipere posse. Quare si tubi punctum  $S$ , in quo supra generatim celeritatem  $s$  definiuimus, in  $A$  transferamus, formula ibi pro celeritate exhibita

$$s = \frac{c}{15} (tm - TM + TN + tn) + \frac{c}{255} (ATM - Atm - ATN - Atn)$$

hoc casu nulla esse debet. At hoc casu habebimus  $S = 0$ , quia in hac formula posuimus  $AS = S$ , ex quo necesse est continuationem quaesitam ita esse

comparatam vt fit  $tm = TM$  et  $tn = -TN$ .  
 Quamobrem in nostra figura scalam  $AMD$  sine  
 vlla variatione super axe  $Ad$  describi conuenit vt  
 fit ea  $Am d$  altera vero scala  $ANFG$  ibi ad con-  
 trariam axis partem describi debet vt fit  $Anfg$ .  
 His iam ambabus scalis vltra  $A$  continuatis confide-  
 remus in tubo locum quemcunque  $S$ , statuendo nunc  
 distantiam a vertice  $AS = S$ , vbi cum aer initio  
 fuerit in aequilibrio, ideoque  $T = 0$  et  $Q = B$ .  
 hincque  $SQ = 0$ , elapso tempore  $= t$ , capiamus  
 vtrinque ab  $S$  interualla  $ST' = St' = ct$ , sintque  
 in punctis  $T'$  et  $t'$  applicatae ambarum scalarum  
 $T'M'$ ,  $T'N'$  et  $t'm'$ ,  $t'n'$ ; atque ex his status ae-  
 ris in  $S$ , ita definietur vt fit ibi

$$\begin{aligned} \text{densitas } q &= B \left( 1 + \frac{t}{2S} (T'M' + t'm') - \frac{t}{2S} (T'N' - t'n') \right) \text{ et} \\ \text{celeritas } v &= \frac{c}{2S} (t'm' - T'M') + \frac{c}{2S} (T'N' + t'n') \\ &\quad - \frac{c}{2SS} (At'm' - AT'M') - \frac{c}{2SS} (AT'N' + At'n') \end{aligned}$$

vnde primo patet, quamdiu tempus ab initio ela-  
 psum  $t$  minus fuerit quam  $\frac{SD}{c}$ , tum ob

$$T'M' = 0, \quad t'm' = 0, \quad \text{et} \quad T'N' = t'n' = DF$$

fore  $q = B$  et ob

$$At'm' = AT'M' \quad \text{et} \quad AT'N' = AT'.DF$$

atque  $At'n' = At'.DF$  prodire

$$v = \frac{c}{S}.DF - \frac{c}{2SS}(AT' + At') = 0 \quad \text{ob} \quad AT' + At' = 2AS = 2S,$$

tamdiu ergo aer ibi in aequilibrio manebit. Statim  
 autem ac tempus elapsum  $t$  maius fit quam  $\frac{SD}{c}$ ,  
 aer

aer in S agitari incipiet; ponamus ergo elapsum iam esse tempus  $t = \frac{AS}{c}$ , et quia nunc est

$$T'M' = 0, t'm' = 0, T'N' = DF, t'n' = 0, \\ AT'M' = AMD, At'm' = 0, AT'N' = AT'.DF = 2S.DF \text{ et } At'n' = 0 \\ \text{erit tum in loco S}$$

densitas  $q = B \left( 1 - \frac{DF}{2S} \right)$  et

celeritas  $g = \frac{c.DF}{2S} + \frac{c.AMD}{2SS} - \frac{c.DF}{S} = \frac{c.AMD}{2SS} - \frac{c.DF}{2S}$ .

Pro tempore autem quouis medio elapso  $t = \frac{ST}{c}$  elicitur

densitas  $q = B \left( 1 + \frac{TM + TN - DF}{2S} \right)$  et

celeritas  $g = \frac{c}{2S} (TM + TN - DF) + \frac{c}{2SS} (DTM + DFTN - DT.DF)$ .

Videamus denique etiam quomodo status aeris in S se fit habiturus cum effluerit tempus

$$t = \frac{Sd}{c} = \frac{AS + AD}{c};$$

tum vero erit

$$T'M' = 0, AT'M' = AMD : T'N' = DF : AT'N' \\ = AT'.DF = 2S.DF + AD.DF:$$

porro

$$t'm' = 0, At'm' = Amd = AMD, t'n' = -df = -DF, \\ At'n' = -Adf = -AD.DF,$$

ideoque

densitas  $q = B \left( 1 - \frac{DF}{S} \right)$  et

celeritas  $g = -\frac{c.DF}{S}$ .

Coroll.

## Coroll. 1.

138. Celeritas ergo pulsus, cum ad locum quemuis S peruenerit duabus constat partibus, quarum prior decrescit in ratione distantiae  $AS = S$ , posterior vero in ratione duplicata distantiae, quae autem posterior pars prae priori euanescit statim ac distantia  $AS = S$  fit modica.

## Coroll. 2.

139. Cum impulsio in organo auditus facta pendeat sine dubio a celeritate agitationis in quouis pulsu, hinc patet quomodo sonus aucta distantia continuo diminuatur; et quia vis impulsiois quadrato celeritatis proportionalis statuenda videtur, soni debilitatio sequetur rationem duplicatam distantiarum.

## Scholion. 1.

140. Insignis hic difficultas occurrit, quod postquam pulsus penitus per locum S transferit, aer tamen ibi non in aequilibrium restituitur, nisi pulsus initialis ita fuerit comparatus, ut interuallum DF euanescat. Talis certe commotio post transitum pulsus nullo modo admitti potest, ideoque calculus noster defectus potius cuiuspiam arguendus videtur, nisi dicere velimus, omnem agitationem aeri primum inductam necessario ita semper esse comparatam, ut interuallum DF inde prodeat euanesceus. Quoniam vero hoc nulla ratione probari potest, ori-

go huius incommodi in eo quaerenda videtur, quod cum interuallum  $DF$  ex valore integrali  $\frac{1}{6} \int Y dS$  sit natum, in hac ipsa integratione iusta constans sit neglecta: dummodo ergo talem constantem introduxissimus, qua hoc integrale per totam scalam celeritatum extensam ad nihilum fuisset reductum, omnis haec difficultas penitus euauisset, cum inde etiam curua  $ANF$  ultra  $D$  tota in axem  $DB$  incidisset. Nullum ergo est dubium quin hic origo istius defectus calculi sit sita, totumque calculum hoc modo expediri conueniat. Talia autem incommoda in argumento prorsus nouo minime sunt miranda, et sperare licet, cum id diligentius fuerit excultum, tum omnia sponte dissipatum iri. Hic autem continuatio scalarum ultra verticem  $A$  merito suspecta videtur, propterea quod in hoc loco fit  $S = 0$ , iique termini quos destrui oportet infiniti; cui incommodo in sequenti problemate medelam afferre conabor.

### Scholion 2.

141. Ex hoc problemate colligere licet, quemadmodum pulsus quicumque in libero aere quaqua versus propagetur; si enim quasi centrum pulsus propagati sit in  $A$ , vniuersus aer circumfusus in infinitos conos, quorum vertices in  $A$  concurrant distributus concipi potest; et manifestum est per quemlibet eorum pulsus perinde propagatum iri, ac per liberum aerem quoniam qua duo huiusmodi tubi se mutuo tangunt, ibi densitas ac propterea etiam

pressio est eadem, ita vt etiam tubis remotis propagatio eandem legem sit secutura. Nunc ergo intelligimus pulsus in libero aere eadem prorsus celeritate propagari atque in tubis cylindricis; at vero ob tuborum amplificationem pulsus continuo debilitari, ita vt celeritas cuiusque agitationis diminuatur in ratione distantiarum a pulsu initiali A; latitudinem vero pulsum, ceterasque soni qualitates in propagatione non alterari.

### Problema 95.

Tab. IX.  
Fig. 106.

142. Si tubus conicus citra verticem I in A a fit terminatus ibique siue apertus siue clausus, ex agitatione initiali aeri in tubo A a B b contento inducta formulas, pro motu sequente definiendo exhibere.

### Solutio.

Posita termini A a vertice conici I distantia  $IA = a$ , sumatur in cono locus quicumque S vocata distantia  $AS = s$ , vt distantia quam ante posuimus S hic fit  $= a + s$ , initio autem in S fuerit densitas  $= Q$  naturali existente  $= B$  et celeritas secundum  $SB = T$ . Elapso autem tempore quocunque  $t$  eiusdem aeris, qui initio fuerat in S, fit densitas  $= q$ , celeritas  $= v$  et translationis spatium  $Ss = w$ . Cum iam amplitudo tubi in S fit  $\Omega = nn(a + s)^2$ , erit  $\frac{d\Omega}{\Omega ds} = \frac{2}{a+s}$ , hincque ex formulis supra inuentis obtinebimus:

$w =$

$$v = \frac{1}{(a+s)^2} f(a+s)^2 ds l \frac{Q}{B} - \frac{1}{a+s} \Gamma':(s+ct) + \frac{1}{(a+s)^2} \Gamma:(s+ct) \\ - \frac{1}{a+s} \Delta':(s-ct) + \frac{1}{(a+s)^2} \Delta:(s+ct)$$

$$q = Q \left( 1 - l \frac{Q}{B} + \frac{1}{a+s} \Gamma'':(s+ct) - \frac{1}{a+s} \Delta'':(s-ct) \right) \text{ et}$$

$$s = \frac{-c}{a+s} \Gamma'':(s+ct) + \frac{c}{a+s} \Delta'':(s-ct) + \frac{c}{(a+s)^2} \Gamma':(s+ct) \\ - \frac{c}{(a+s)^2} \Delta':(s-ct)$$

vnde pro statu initiali cognito colligimus:

$$0 = \frac{1}{(a+s)^2} f(a+s)^2 ds l \frac{Q}{B} - \frac{1}{a+s} (\Gamma':s + \Delta':s) \\ + \frac{1}{(a+s)^2} (\Gamma:s + \Delta:s)$$

$$0 = -l \frac{Q}{B} + \frac{1}{a+s} (\Gamma'':s + \Delta'':s)$$

$$s = \frac{-c}{a+s} (\Gamma'':s - \Delta'':s) + \frac{c}{(a+s)^2} (\Gamma':s - \Delta':s).$$

Ex illa fit

$$\Gamma'':s + \Delta'':s = (a+s) l \frac{Q}{B} \text{ et } \Gamma':s + \Delta':s = f(a+s) ds l \frac{Q}{B}$$

atque

$$\Gamma:s + \Delta:s = \int ds f(a+s) ds l \frac{Q}{B}$$

ex ista vero

$$\int Y ds = \frac{-c}{a+s} (\Gamma':s - \Delta':s), \text{ feu } c(\Gamma':s - \Delta':s) = -(a+s) \int Y ds$$

hincque

$$c(\Gamma'':s - \Delta'':s) = -\int T ds - (a+s)T \text{ et } c(\Gamma:s - \Delta:s) \\ = -\int (a+s) ds f T ds.$$

Qui valores in prima aequatione substituti praebent:

$$0 = f(a+s)^2 ds l \frac{Q}{B} - (a+s) f(a+s) ds l \frac{Q}{B} + \int ds f(a+s) ds l \frac{Q}{B}$$

vnde ambiguitas ob constantem per integrationem ingressam oriunda tollitur, cum debeat esse:

$f ds f(a+s) ds l \frac{Q}{B} = (a+s) f(a+s) ds l \frac{Q}{B} - f(a+s)^2 ds l \frac{Q}{B}$   
 quae duo integralia simplicia ita capiuntur, vtposito  $s = 0$  euanescant. Functiones ergo  $\Gamma$  et  $\Delta$  ita definiuntur vt fit

$$\Gamma^{\prime\prime}: s = \frac{1}{2}(a+s) l \frac{Q}{B} - \frac{(a+s)\tau - f\tau ds}{2c}$$

$$\Delta^{\prime\prime}: s = \frac{1}{2}(a+s) l \frac{Q}{B} + \frac{(a+s)\tau + f\tau ds}{2c}$$

$$\text{tum vero } \Gamma^{\prime}: s = \frac{1}{2} f(a+s) ds l \frac{Q}{B} - \frac{(a+s)f\tau ds}{2c}$$

$$\Delta^{\prime}: s = \frac{1}{2} f(a+s) ds l \frac{Q}{B} + \frac{(a+s)f\tau ds}{2c} \text{ et}$$

$$\Gamma: s = \frac{1}{2}(a+s) f(a+s) ds l \frac{Q}{B} - \frac{1}{2} f(a+s)^2 ds l \frac{Q}{B} - \frac{f(a+s) ds f\tau ds}{2c}$$

$$\Delta: s = \frac{1}{2}(a+s) f(a+s) ds l \frac{Q}{B} + \frac{1}{2} f(a+s)^2 ds l \frac{Q}{B} + \frac{f(a+s) ds f\tau ds}{2c}$$

Statuamus ergo in S duas applicatas

$$SQ = (a+s) l \frac{Q}{B} \text{ et } SV = \frac{(a+s)\tau + f\tau ds}{c}$$

descriptisque binis scalis CQc et DVd, erit

$$\Gamma^{\prime\prime}: s = \frac{1}{2} SQ - \frac{1}{2} SV; \quad \Delta^{\prime\prime}: s = \frac{1}{2} SQ + \frac{1}{2} SV$$

$$\Gamma^{\prime}: s = \frac{1}{2} ACSQ - \frac{1}{2} ADSV; \quad \Delta^{\prime}: s = \frac{1}{2} ACSQ + \frac{1}{2} ADSQ$$

Pro tempore ergo elapso  $t$  sumtis interuallis ST  
 $= St = ct$  densitas  $q$  et celeritas  $v$  ita definiuntur  
 vt fit:

$$q = Q \left( 1 + \frac{1}{2(a+s)} (TM - TN + tm + tn - 2SQ) \right)$$

$$v = \frac{c}{2(a+s)} (tm + tn - TM + TN) + \frac{c}{2(a+s)^2} (ACTM - ADTN - ACtm - ADtn)$$

quae

quae duo elementa nosse sufficit, cum inde tertium, nempe spatium  $S$  facile concludatur.

Vt iam inuestigemus quomodo utramque scalam ultra  $A$  continuari oporteat, sumamus punctum  $S$  in ipso termino  $A$ , vt fit  $s = 0$ , et abscissis utriusque  $A T' = A t' = ct$ , quoniam areas curvarum a puncto  $A$  dextrorsum computauimus, quae nunc sinistrorsum cadunt, negatiue capi debent, eritque pro hoc puncto  $A$

$$q = Q \left( 1 + \frac{1}{2a} (T'M' + t'm' - 2AC) - \frac{1}{2a} (T'N' - t'n') \right)$$

$$s = \frac{c}{2a} (t'm' - T'M') + \frac{c}{2a} (T'N' + t'n') + \frac{c}{2aa} (ACT'M' + ACt'm') - \frac{c}{2a^2} (ADT'N' - ADt'n').$$

Nunc duo casus sunt expediendi prout tubus in termino  $A$  fuerit apertus vel clausus:

I. Sit tubus in  $A$  apertus et quia ibi densitas perpetuo manet naturalis, vt fit  $Q = B$  et  $q = B$ , erit  $AC = 0$ ; fierique necesse est

$$T'M' + t'm' = 0 \quad \text{et} \quad T'N' = t'n'$$

hoc ergo casu utraque scala prorsus vt in tubis cylindricis continuatur; scala scilicet densitatum  $CQc$  ad alteram axis partem, celeritatum vero  $DVd$  ad eandem describitur.

II. Sit tubus in  $A$  clausus, et quia ibi celeritas perpetuo manet nulla, pro scala densitatum primo esse debet:

$$a(t'm' - T'M') + ACT'M' + ACt'm' = 0.$$

G g g 3

statua-

statuamus

$A T' = A t' = x$ ,  $T' M' = y$  et  $t' m' = z$ ,  
vt habeamus:

$a(z-y) + f(y+z)dx = 0$  seu  $adz + zdx - ady + ydx = 0$   
quae integrata dat:

$$e^{\frac{x}{a}} az = \int e^{\frac{x}{a}} (a dy - y dx) = e^{\frac{x}{a}} ay - 2 \int e^{\frac{x}{a}} y dx = -e^{\frac{x}{a}} ay + 2 a \int e^{\frac{x}{a}} dy$$

hincque

$$z = t' m' = y - \frac{2}{a} e^{-\frac{x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y dx = -y + 2 e^{-\frac{x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} dy.$$

Deinde pro scala celeritatum oportet sit:

$$a(T' N' + t' n') - A D T' N' + A D t' n' = 0$$

faciamus

$$A T' = A t' = x, \quad T' N' = y, \quad t' n' = z,$$

et aequatio

$$a(y+z) - f y dx + f z dx = 0 \text{ seu } adz + zdx + ady - ydx = 0$$

integrata praebet:

$$e^{\frac{x}{a}} az = \int e^{\frac{x}{a}} (y dx - a dy) = -e^{\frac{x}{a}} ay + 2 \int e^{\frac{x}{a}} y dx = e^{\frac{x}{a}} ay - 2 a \int e^{\frac{x}{a}} dy$$

hincque

$$z = t' n' = -y + \frac{2}{a} e^{-\frac{x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y dx = y - 2 e^{-\frac{x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} dy$$

utroque casu integralia ita definiiri debent, vt posito  $x = 0$  fiat  $z = y$ .

### Coroll. I.

143. Cum casu, quo tubus in  $A a$  est apertus

tus ambae scalae eodem modo continuentur quo in tubis cylindricis, eadem quoque lex continuationis locum habebit si tubus conicus etiam in altero termino  $Bb$  fuerit apertus, unde sequitur in tubo conico utrinque aperto agitationes aeris prorsus convenire cum iis, quas supra pro tubis cylindricis definiuimus.

### Coroll. 2.

144. Quae igitur supra de sonis, quos tibiae apertae edunt annotauimus, eadem quoque locum habent si tibiis figura conica tribuatur. Neque tamen figura nimis diuergens admitti potest, quia tum agitationes per vnamquamque sectionem non amplius forent acquabiles, vti Theoria nostra postulat.

### Coroll. 3.

145. Ex hoc problemate theoria tuborum cylindricorum deducitur si distantia  $IA = a$  statuatur infinita. Tum autem pro casu quo tubus in  $Aa$  est clausus eadem lex pro vtriusque scalae continuatione colligitur, quia ob  $a = \infty$  erit  $t'm' = T'M'$  et  $t'n' = -T'N'$ .

### Scholion 1.

146. Nunc dubia quae supra circa propagationem pulsus in ipso vertice conici excitati supererant, perfecte tolluntur, cum enim totum negotium eo redeat, quomodo vtramque scalam ultra verticem conici oporteat continuari, ad hunc casum nostrum.

strum problema accommodabimus, si distantiam  $IA = a$  evanescentem simulque tubum in  $Aa$  clausum statuamus quoniam enim conus in vertice per se clauditur ibi certe aer nullum motum concipere potest. Ex quo primum pro continuatione scalae densitatum quaestio huc redit, vt ex hac aequatione

$$z = -y + 2e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} dy$$

valor ipsius  $z$  definiatur casu quo  $a = 0$ , quod cum ob exponentem  $\frac{x}{a}$  infinitum minus pateat ad aequationem differentialem

$$adz + zdx - a dy + y dx = 0$$

confugiamus, vnde ob  $a = 0$  manifesto sequitur  $z = -y$ , ita vt scala densitatum axi ad partem contrariam applicari debeat, secus ac supra per evanescentiam intervalli  $S = 0$  decepti fecimus. Deinde vero pro scala celeritatum ex aequatione differentiali

$$adz + zdx + a dy - y dx = 0 \text{ ob } a = 0$$

deducimus  $z = y$ , ita vt haec scala ad eandem axis partem constitui debeat vtraque scilicet continuatio eadem lege peragitur ac si tubus esset apertus. Hinc Tab. IX. Fig. 105. ergo postrema evolutio in probl. 94 ita emendabitur vt cum scalae in contrarias plagas cadant atque in figura sunt repraesentatae elapso tempore  $t = \frac{s \cdot d}{c}$ , fiat  $t' m' = 0$ ,  $t' n' = +DF$  area  $A t' m' = +A m d = AMD$  quia hic duplex signi mutatio fieri debet altera quatenus haec area ultra  $A$ , altera quatenus infra

infra axem cadit. Denique vero fit area  $A' n' = -A df$   
 $= -A D. DF$ ; vnde consequimur:

$$T'M' + t'm' = 0; T'N' - t'n' = 0; A' n' - A T'M' = 0$$

$$t'm' - T'M' = 0; T'N' + t'n' = 2DF; A T'N' + A t'n' = 2S. DF$$

hincque porro  
 densitatem  $q = B$  et celeritatem

$$v = \frac{c}{2S} \cdot 0 + \frac{c}{2S} \cdot 2DF - \frac{c}{2SS} \cdot 0 - \frac{c}{2SS} \cdot 2S. DF \text{ seu}$$

$$v = \frac{c}{S} \cdot DF - \frac{c}{S} \cdot DF = 0$$

ex quo manifestum est elapso tempore  $t = \frac{Sd}{c}$  aerem in  
 S penitus in aequilibrium restitui, sicque veritatem  
 egregie saluari.

### Scholion 2.

147. Quoniam vidimus tibias conicas pro lon-  
 gitudine eosdem edere sonos atque cylindricos siqui-  
 dem sint apertae, probe notandum est hanc conueni-  
 entiam neutiquam in tibiis clausis locum habere.  
 Cum enim si tubus conicus ad  $A \alpha$  fuerit clausus,  
 ambae scalae in lineas ipsis maxime dissimiles conti-  
 nuari debeant, hinc nullae oscillationes regulares  
 oriri poterunt; sed sonus iis editus admodum erit  
 rudis et inconditus minimeque ad harmoniam efflici-  
 endam accommodatus.