$$\frac{\frac{16}{5\pi}\mathrm{V}u}{\alpha + a + \delta h + \frac{17}{100}\cdot\frac{(\lambda+1)cc}{g}},$$

quae a praecedente vix differt. Hinc intelligitur semper expedire celeritatem $c$ quam minimam statui quod iam pro lubitu fieri potest, inde enim amplitudo antliarum ita definitur, vt sit

$$ff = \frac{\frac{2}{5c}\mathrm{V}u}{\alpha + a + \delta h + \frac{(\lambda+1)cc}{6g}}:$$

quare semper conducit ipsas antlias amplissimas confici vt inde celeritas $c$ eo minor euadat: tum vero altitudo antliarum $b$ per elongationem cubitorum ab axe determinatur, cum sit $b = 2\mathrm{FG}$, id quod arbitrio nostro permittitur.

---

# CAPVT V.

## DE MOTV AQVAE PER TVBOS DIVERSO CALORIS GRADV INFECTOS.

### Problema 61.

124. Dato caloris gradu in singulis tubi locis quem statim cum aqua ibi contenta communicari assumimus definire motum, quem aqua in huiusmodi tubo recipere poterit.

So-

Solutio.

Sit tubus $AO$ ratione amplitudinis vtcunque variabilis et incuruatus, sumtoque in eo interuallo indefinito $AS = s$, sit ibi amplitudo $= \omega$ et altitudo puncti $S$ super plano horizontali fixo $S\sigma = z$; gradus autem coloris tantus, vt ibi aquae tribuatur densitas $= q$, quae ergo per hypothesin est variabilis et functio certa ipsius $AS = s$, quoniam in eodem loco aquam perpetuo eodem caloris gradu infectam assumimus. Elapso autem tempore $t$ sit aquae per sectionem $Ss$ transfluentis celeritas $= \upsilon$ in plagam $SO$ directa et pressio $= p$, quae sunt functiones vtriusque variabilis $s$ et $t$. His positis quia $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$ ex problemate 46. has duas consequimur aequationes: Tab. VI. Fig. 63.

$$\left(\frac{d.q\omega\upsilon}{ds}\right) = 0 \text{ et } \frac{2gdp}{q} = -2gdz - \upsilon d\upsilon - ds\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right).$$

Ex priori aequatione sequitur fore $q\upsilon\omega = \Gamma : t$, ita vt eodem tempore quantitas $q\upsilon\omega$ per totum tubum eundem obtineat valorem. Ponamus ergo in certo tubi loco, vbi amplitudo $= ff$ et densitas aquae $= 1$, celeritatem esse $= v$, quae ergo erit functio solius temporis $t$; ac prima conditio praebet $q\upsilon\omega = ffv$, ita vt sit $\upsilon = \frac{ffv}{q\omega}$, hincque quia quantitates $q$ et $\omega$ a sola variabili $s$ pendent, erit $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = \frac{ffdv}{q\omega dt}$, qui valor in altera aequatione, qua tempus $t$ constans spectatur, substitutus praebet:

2gdp

$$2gdp = -2gqdz - q\vartheta d\vartheta - \frac{ffdv}{dt}\cdot\frac{ds}{\omega},$$

ex qua integrando elicimus:

$$2gp = \Delta:t - 2g\int qdz - \tfrac{1}{2}q\vartheta\vartheta + \tfrac{1}{2}\int\vartheta\vartheta dq - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega},$$

seu loco $\vartheta\vartheta$ substituto valore $\frac{f^4vv}{qq\omega\omega}$,

$$2gp = \Delta:t - 2g\int qdz - \frac{f^4vv}{2q\omega\omega} + \tfrac{1}{2}f^4vv\int\frac{dq}{qq\omega\omega} - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}.$$

Quodsi ergo in duobus locis pressio aliunde fuerit cognita ad ea hanc aequationem applicando, primo functio temporis $\Delta:t$ eliminari, tum vero celeritas $v$ pro quouis tempore determinari poterit, qua cognita deinceps omnia quae ad motum spectant, innotescent.

### Coroll. 1.

125. Cum sit $\int\frac{dq}{qq\omega\omega} = \frac{-1}{q\omega\omega} - 2\int\frac{d\omega}{q\omega^3}$, aequatio inuenta etiam ita repraesentabitur:

$$2gp = \Delta:t - 2g\int qdz - \frac{f^4vv}{q\omega\omega} - f^4vv\int\frac{d\omega}{q\omega^3} - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega},$$

in qua hoc commodi occurrit, vt quoties tubus vbique est aequaliter amplus, terminus $\int\frac{d\omega}{q\omega^3}$ euanescat, simulque fiat $\int\frac{ds}{\omega} = \frac{s}{\omega}$.

### Coroll. 2.

126. Quia $v$ denotat celeritatem in data tubi sectione, cuius amplitudo $= f$, et vbi densitas $q$ fit $= 1$; hanc sectionem vbi lubuerit assumere licet, quoniam densitas, quam aqua ibi ob certum coloris gradum habet, vt densitas naturalis spectari potest, ex qua pressiones definiuntur.

Scho-

### Scholion.

127. Quoniam supra vidimus massam fluidam gravem in aequilibrio esse non posse, nisi in aequalibus altitudinibus vbique eadem densitas locum habeat, operae omnino erit pretium hic eiusmodi casus euoluere, vbi aequilibrium prorsus subsistere nequit. Ac primo quidem se Tab. VI. Fig. 64.
offert tubus circularis in situ verticali positus, qui ab vna parte calidus, ab altera frigidus seruatur. Sit scilicet ASBD tubus circularis in plano verticali positus cuius ACB sit diameter horizontalis; hunc tubum circa A ita calefieri sumamus, vt aqua ibi contenta tantum non ebulliat e regione vero in B tubus sit frigidus, gradu caloris ab A ad B siue sursum siue deorsum progrediendo successiue decrescente, vt in A calor sit maximus; in B vero minimus. Quatenus ergo tubum vehementer angustum ponimus, aqua per eum mota quasi puncto temporis in quouis loco tubi calorem recipiet. Quodsi nunc totum tubum aqua plenum assumamus, fieri omnino nequit, vt aqua se ad aequilibrium componat, cuiusmodi igitur motum sit adeptura in sequente problemate inuestigabimus.

### Problema 62.

128. Si tubus circularis in situ verticali positus Tab. VI. Fig. 64.
ASBD sit perpetuo in A calidus, in B vero frigidus, tum vero aqua repleatur, quae vbique tubi temperamentum statim

tim recipiat; huius aquae motum in tubo, quia aequilibrium non datur determinare.

Solutio.

Sit radius circuli $CA = CB = c$, $AB$ diameter horizontalis, et amplitudo tubi vbique eadem $= ff$. Iam quia ad A calor est maximus; ad B vero minimus, densitas aquae ad A erit minima ad B vero maxima: statuamus densitatem mediam $= 1$, ad quam scilicet aestimationem pressionem referimus; tum vero in A sit densitas $= 1 - \alpha$ in B vero $= 1 + \alpha$, ab A vero ad B progrediendo densitas ita crescat, vt in puncto quouis S posito angulo $ACS = \Phi$ sit densitas $q = 1 - \alpha \cos. \Phi$, quippe quae fromula pro puncto A dat densitam $1 - \alpha$ pro B autem $1 + \alpha$. Nunc porro altitudo puncti S super linea horizontali AB est $PS = c \sin. \Phi = z$ et arcus $AS = c\Phi = s$. Ab initio quo vniuersa aqua adhuc erat in quiete elapsum sit tempus $= t$, ac celeritas in puncto S vocetur $= \mathfrak{v}$ a termino A recedens, pressio vero ibidem $= p$. Quodsi nunc in eo loco vbi densitas est $= 1$, celeritas aquae ponatur $= v$, ob amplitudinem vbique eandem $\omega = ff$ erit $\mathfrak{v} = \frac{v}{q} = \frac{v}{1 - \alpha \cos. \Phi}$. Hinc ex principiis ante stabilitis definiamus ante omnia pressionem in loco indefinito S, ac primo ab $z = c \sin. \Phi$, $q = 1 - \alpha \cos. \Phi$ erit $\int q dz = c \int d\Phi \cos. \Phi \, (1 - \alpha \cos. \Phi)$ $= c \int d\Phi (\cos. \Phi - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha \cos. 2\Phi)$, ideoque $\int q dz = c \sin. \Phi$

$- \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}\alpha c\Phi-\frac{1}{4}\alpha c\sin.2\Phi$. Deinde ob $\omega=ff$ est $\int\frac{d\omega}{q\omega^3}=\frac{s}{ff}=\frac{c\Phi}{ff}$; his factis substitutionibus consequimur hanc aequationem:

$$2gp=\Delta:t-2gc(\sin.\Phi-\tfrac{1}{2}\alpha\Phi-\tfrac{1}{4}\alpha\sin.2\Phi)-\frac{vv}{1-\alpha\cos.\Phi}-\frac{c\Phi dv}{dt}.$$

Hinc pro initio in puncto A prodit haec aequatio:

$$2gp=\Delta:t-\frac{vv}{1-\alpha},$$

pro puncto B vero, ponendo $\Phi=\pi=180^\circ$, haec:

$$2gp=\Delta:t+\alpha gc\pi-\frac{vv}{1+\alpha}-\frac{\pi c dv}{dt}.$$

Percurramus totum circulum vt reuertamur in punctum A et ponendo $\Phi=2\pi$, pro puncto A prodit etiam haec aequatio:

$$2gp=\Delta:t+2\alpha\pi gc-\frac{vv}{1-\alpha}-\frac{2\pi c dv}{dt}.$$

Cum igitur necesse sit vt haec pressio illi pro eodem puncto A sit aequalis, hinc colligimus hanc aequationem:

$$2\alpha\pi gc-\frac{2\pi c dv}{dt}=0 \text{ seu } dv=\alpha g dt,$$

quae integrata dat $v=\alpha gt$, vnde discimus, cum initio celeritas fuisset nulla, eam cum tempore vniformiter crescere, ita vt sit $v=\alpha gt$. Tum vero ob $\frac{dv}{dt}=\alpha g$ erit pro loco quocunque S elapso tempore $t$ pressio:

$$p=\Sigma:t-c(\sin.\Phi-\tfrac{1}{2}\alpha\Phi-\tfrac{1}{4}\alpha\sin.2\Phi)-\frac{\alpha\alpha gtt}{2(1-\alpha\cos.\Phi)}-\tfrac{1}{2}\alpha c\Phi$$

seu $p=\Sigma:t-c\sin.\Phi+\frac{1}{4}\alpha c\sin.2\Phi-\frac{\alpha\alpha gtt}{2(1-\alpha\cos.\Phi)}$,

vnde concludimus pressiones

pro A vbi $\Phi = 0$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha\alpha g t t}{2(1-\alpha)}$,
pro E vbi $\Phi = 90°$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha\alpha g t t}{2} - c$,
pro B vbi $\Phi = 180°$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha\alpha g t t}{2(1+\alpha)}$,
pro D vbi $\Phi = 270°$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha\alpha g t t}{2} + c$.

Coroll. 1.

129. Cum igitur aqua primum in tubo quieuerit, statim ita moueri incipiet, vt in parte inferiori ADB, e locis frigidioribus in calidiora, in parte superiori AEB contra ex calidioribus in frigidiora feratur, fluxusque exoriatur in plagam AEBD, qui continuo vniformiter acceleretur.

Coroll. 2.

130. Ista motus acceleratio eo erit promptior, quo maius fuerit discrimen inter calorem maximum in A et minimum in B. Si in A aqua fere ebulliat in B vero propemodum congelascat, fractio $\alpha$ est circiter $\frac{1}{30}$, ideoque $v = \frac{1}{30}gt = \frac{1}{2}t$ ped. ob $g = 15$ ped. sicque post vnum minutum secundum, motus iam ita rapidus existeret, vt minuto secundo spatium $\frac{1}{2}$ pedis percurreret, post minutum primum autem spatium 30 pedum.

Coroll. 3.

131. Quod ad pressiones attinet, quas tubus interea sustinet, eae quidem non definiuntur, quia tubum vel aquam extrinsecus premendo ad quoduis tempus pressio pro lubitu variari potest. Interim tamen ad B pressio per-

perpetuo erit maxima, sumto enim $\Sigma : t = \frac{\alpha\alpha g t t}{2(1-\alpha)}$ vt pressio in A euanescat, in B erit ea $= \frac{\alpha^3 g t t}{1-\alpha\alpha}$, sicque in temporis ratione duplicata crescet.

Scholion 1.

132. Facile autem intelligitur, si res experimentis exploretur accelerationem motus neutiquam tam rapidam esse futuram, quam calculo inuenimus cuius ratio manifesto in eo est posita, quod statim atque aqua iam velocitatem notabilem acquisiuerit eius calor non subito se ad calorem tubi accommodare valeat, eaque proinde pristinam temperaturam ad aliquod tempus conseruans, in B magis calida quam tubus, in A vero minus fit futura. Cum igitur idem eueniat ac si fractio $\alpha$ minor redderetur, motus quoque accelerationem relaxari oportebit, quae tamen omnino extingui nequit; simul enim atque hoc eueniret, et aquae tempus suppeteret in quouis loco tubi calorem recipiendi, motus de nouo vti ab initio instauraretur. Ex quo perspicuum est, ob hanc causam motum tantum ad certum vsque gradum acceleratum iri, in quo deinceps perpetuo sit permansurus, quamdiu scilicet in ipso tubo discrimen caloris inest. Quoniam vero haec motus moderatio ab ea ratione potissimum pendet, qua tubus cum aqua, haecque vicissim cum tubo suum insitum caloris gradum communicat vbi simul ad vtriusque massam respi-

ci oportet, ex sola theoria hic vix quicquam statuere licebit. At si ope ignis circa A suscitati in hoc loco tubo perpetuo insignis caloris gradus imprimatur, tubusque satis sit magnus, vt tantus calor non ad locum oppositum B transferri possit, nullum plane est dubium, quin aqua perpetuo motum satis velocem in plagam AEBD sit conseruatura.

Scholion 2.

133. Assumsi in problemate tubo in altera extremitate horizontali A maximum caloris gradum, in altera vero B minimum induci, quae dispositio ad motum generandum maxime est accomodata. Si enim maximus calor excitaretur in loco vel summo E vel imo D, et e regione minimus existeret, tum nullus plane motus oriretur, sed aqua semel in quiete posita perpetuo in eodem statu perseueraret. Quare etiamsi initio tubus circa A maximum calorem acceperit, nisi is a causa externa sustineatur, aqua per A transiens calore ibi receptum cum tubi locis superioribus S et E communicabit vicissimque frigus, quo per B transiens erat imbuta in tubi regionem inferiorem E transferet, quo tandem efficietur, vt cum maximus calor in tubi locum summum E fuerit translatus minimusque in imum D, tum omnis motus sit cessaturus, et aqua in statum aequilibrii sit peruentura, in quo acquiescere valeat. De cetero in solutione problematis certam legem stabiliui, secundum quam densitas fluidi ab A versus B progrediendo augeatur, quod augmentum

ipsis

ipsis distantiis in recta horizontali AB sumtis proportionale statui, ita vt excessus densitatis in S supra densitatem in A proportionalis esset spatio AP; quae hypothesis cum veritate satis consentire videtur, si prope A ignis aliaue materia calorem gignens concipiatur constituta, cum enim vis calefaciendi in loco quouis S quadrato distantiae AS proportionalis aestimetur, hoc quadratum in circulo ipsi sinui verso AP est proportionale: Interim tamen hac hypothesi calculo potissimum consulens sum vsus, et infra rem generalius expedire conabor.

### Problema 64.

134. Sit vti in praecedente problemate tubus circularis in plano verticali positus isque in A calidus in B vero frigidus; verum huic tubo diuersa tribuatur amplitudo; hoc posito, si tubus fuerit aqua repletus, eius motum definire. Tab. VI. Fig. 64.

### Solutio.

Sit vt ante radius circuli $CA = CB = c$, densitas aquae in $A = 1 - \alpha$, in $B = 1 + \alpha$, at in E et $D = 1$, in loco vero quouis indefinito S posito angulo $ACS = \Phi$ sit densitas $q = 1 - \alpha \cos.\Phi$. Tum vero in E et D sit amplitudo $= ff$ verum in A statuatur $= ff(1 - \mathfrak{g})$, in $B = ff(1 + \mathfrak{g})$ at in S fit $\omega = ff(1 - \mathfrak{g}\cos.\Phi)$. Elapso iam tempore $t$ in E vel D, vbi amplitudo est $ff$ et densitas

sitas $= 1$, celeritas aquae sit $= v$, vnde in loco indefinito S erit $\mathfrak{z} = \frac{v}{(1-\alpha\cos.\Phi)(1-\mathfrak{G}\cos.\Phi)}$, quam aequationem prima motus conditio suppeditat. Altera vero posita pressione in $f = p$ ita se habet:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q dz - \tfrac{1}{2}q\mathfrak{z}\mathfrak{z} + \tfrac{1}{2}\int \mathfrak{z}\mathfrak{z} dq - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega},$$

pro cuius euolutione ob $z = c\sin.\Phi$ et $q = 1 - \alpha\cos.\Phi$ est vt ante:

$$\int q dz = c\sin.\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha c\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha c\sin.2\Phi.$$

Deinde ob $s = c\Phi$ et $\omega = ff(1 - \mathfrak{G}\cos.\Phi)$ est $\int\frac{ds}{\omega} = \frac{c}{ff}$

$$\int\frac{d\Phi}{1-\mathfrak{G}\cos.\Phi} = \frac{c}{ff\sqrt{(1-\mathfrak{G}\mathfrak{G})}}\text{Ang. sin.}\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1-\mathfrak{G}\mathfrak{G})}}{1-\mathfrak{G}\cos.\Phi}.$$

Denique ob $dq = \alpha d\Phi\sin.\Phi$ est $\int\mathfrak{z}\mathfrak{z}dq = \alpha vv\int\frac{d\Phi\sin.\Phi}{(1-\alpha\cos.\Phi)^2(1-\mathfrak{G}\cos.\Phi)^2}$, vnde fit integrando:

$$\int\mathfrak{z}\mathfrak{z}dq = \frac{\alpha vv}{(\alpha-\mathfrak{G})^2}\left(\frac{-(\alpha+\mathfrak{G})+2\alpha\mathfrak{G}\cos\Phi}{(1-\alpha\cos.\Phi)(1-\mathfrak{G}\cos.\Phi)} + \frac{2\alpha\mathfrak{G}}{\alpha-\mathfrak{G}}\,l\,\frac{1-\mathfrak{G}\cos.\Phi}{1-\alpha\cos.\Phi}\right).$$

Ponatur nunc $\Phi = 0$, vt pressionem in puncto A obtineamus:

$$2gp = \Delta : t - \frac{vv}{2(1-\alpha)(1-\mathfrak{G})^2} + \frac{\alpha vv}{2(\alpha-\mathfrak{G})^2}\left(\frac{-\alpha-\mathfrak{G}+2\alpha\mathfrak{G}}{(1-\alpha)(1-\mathfrak{G})} + \frac{2\alpha\mathfrak{G}}{\alpha-\mathfrak{G}}\,l\,\frac{1-\mathfrak{G}}{1-\alpha}\right)$$

tum vero pro eodem puncto sit $\Phi = 2\pi$ erit:

$$2gp = \Delta : t + \pi\alpha gc - \frac{vv}{2(1-\alpha)(1-\mathfrak{G})^2}$$
$$+ \frac{\alpha vv}{2(\alpha-\mathfrak{G})^2}\left(\frac{-\alpha-\mathfrak{G}+2\alpha\mathfrak{G}}{(1-\alpha)(1-\mathfrak{G})} + \frac{2\alpha\mathfrak{G}}{\alpha-\mathfrak{G}}\,l\,\frac{1-\mathfrak{G}}{1-\alpha}\right) - \frac{2\pi c dv}{dt\sqrt{(1-\mathfrak{G}\mathfrak{G})}},$$

ex quorum valorum aequalitate elicitur $dv = \alpha g dt\sqrt{(1-\mathfrak{G}\mathfrak{G})}$, hincque $v = \alpha g t\sqrt{(1-\mathfrak{G}\mathfrak{G})}$.

## Coroll. 1.

135. Diuersa ergo tubi amplitudo, siquidem legem in solutione positam sequitur, efficit vt celeritas aliquanto mi-

minor generetur, idque perinde siue maxima amplitudo statuatur in B siue in A. Ac si foret $\varepsilon = 1$, quo casu amplitudo in A vel B euanesceret, motus plane nullus orietur, vti per se est manifestum.

## Coroll. 2.

136. Si esset $\varepsilon = \alpha$, seu densitas vbique tubi amplitudini esset proportionalis, foret:

$$\int \varepsilon\varepsilon dq = \alpha vv \int \frac{d\Phi \sin \Phi}{(1-\alpha \cos.\Phi)^4} = \frac{-vv}{3(1-\alpha \cos.\Phi)^3} \text{ et } \varepsilon\varepsilon q = \frac{vv}{(1-\alpha \cos.\Phi)^3}:$$

ideoque

$$-\tfrac{1}{2} q\varepsilon\varepsilon + \tfrac{1}{2}\int \varepsilon\varepsilon dq = \frac{-2vv}{3(1-\alpha \cos.\Phi)^3},$$

quibus formulis pro pressione inuenienda est vtendum.

## Scholion.

137. Quoniam igitur vidimus, quantum inaequalitas in tubi amplitudine conferat ad motum aquae, inquiramus nunc etiam qualis motus sit oriturus in eodem tubo circulari, si loca maximi et minimi caloris non in diametrum horizontalem, sed alium vtcunque oblique positum incidant, vbi quidem amplitutinem tubi iterum vbique eandem statuamus.

## Problema 65.

138. Sit vt hactenus tubus circularis in plano verticali positus isque vbique aeque amplus; verum maximus calor reperiatur in A minimus in B, vt diameter AB sit Tab. VI. Fig. 65.

ad

ad horizontem HI inclinatus angulo $ACH = \zeta$; atque cum hic tubus fuerit aqua plenus, eius motum definire.

Solutio.

Sit radius circuli $CA = CB = c$, amplitudo tubi constans $= ff$ vt sit $\omega = ff$; ac pro puncto quouis S posito angulo $ACS = \Phi$ sit aquae densitas $q = 1 - \alpha \cos.\Phi$, ita vt in punctis E et F ea fiat $= 1$, vbi aquae celeritas elapso tempore $t$ statuatur $= v$, quae ergo eodem tempore in S erit $s = \frac{v}{1 - \alpha \cos.\Phi}$, cuius puncti S altitudo super horizonte cum sit $SP = c \sin.(\Phi - \zeta) = z$ si pressio in S vocetur $= p$, ob arcum $AS = c\Phi$ erit:

$$2gp = \Delta : t - 2gc\int (1 - \alpha \cos.\Phi)\, d\Phi \cos.(\Phi - \zeta) - \frac{vv}{1 - \alpha \cos.\Phi} - \frac{c\Phi dv}{dt}.$$

At est

$$\int d\Phi \cos.\Phi \cos.(\Phi - \zeta) = \tfrac{1}{2}\int d\Phi\, (\cos.\zeta + \cos.(2\Phi - \zeta))$$
$$= \tfrac{1}{2}\Phi \cos.\zeta + \tfrac{1}{4}\sin.(2\Phi - \zeta),$$

ideoque habebitur:

$$2gp = \Delta : t - 2gc \sin.(\Phi - \zeta) + \alpha gc\Phi \cos.\zeta$$
$$+ \tfrac{1}{2}\alpha gc \sin.(2\Phi - \zeta) - \frac{vv}{1 - \alpha \cos.\Phi} - \frac{c\Phi dv}{dt}.$$

Hinc pro loco A pressionem duplici modo exprimere poterimus; prout ponamus vel $\Phi = 0$, vel $\Phi = 2\pi$; prior positio dat:

$$2gp = \Delta : t + 2gc \sin.\zeta - \tfrac{1}{2}\alpha gc \sin.\zeta - \frac{vv}{1 - \alpha};$$

altero vero

$$2gp = \Delta : t + 2gc \sin.\zeta + 2\alpha\pi gc \cos.\zeta - \tfrac{1}{2}\alpha gc \sin.\zeta - \frac{vv}{1 - \alpha} - \frac{2\pi c dv}{dt},$$

quae

quae duae expressiones cum inter se debeant esse aequales, est:

$$\alpha g \cos.\zeta = \frac{dv}{dt}, \text{ hincque } v = \alpha g t \cos.\zeta,$$

vnde ad quoduis tempus in quouis loco celeritas innotescit cuius quidem directio in plagam AEBF tendit. Tum vero pressio in loco quocunque S erit:

$$p = \Sigma : t - c \sin.(\Phi - \zeta) + \tfrac{1}{4}\alpha c \sin.(2\Phi - \zeta) - \frac{\alpha\alpha g t t \cos.\zeta^2}{2(1 - \alpha \cos.\Phi)}.$$

Coroll. 1.

139. Hinc ergo patet si diameter AB per loca maximi minimique caloris transiens fuerit verticalis, ita vt maximus calor sit in circuli loco vel summo vel imo ob $\cos.\zeta = 0$, nullum motum a diuersitate caloris generatum iri; sed aquam hoc casu in aequilibrio consistere posse, propterea quod in tubi locis aeque altis par caloris gradus reperitur.

Coroll. 2.

140. Si locus maximi caloris A a puncto horizontali H minus quadrante distet, siue sursum siue deorsum, motus aquae fiet in directione AEBF; sin autem illa distantia HA quadrantem superet, quia tum $\cos.\zeta$ fit negatiuus, motus in contrariam plagam AFBE erit directus.

Coroll. 3.

141. Semper ergo in locis inferioribus motus fiet a regione frigidiore in calidiorem; in superioribus vero con-

tra a regione calidiore in frigidiorem; omnino vti iam supra circa aequilibrium est obseruatum, etiamsi ibi motum ipsum definire haud licuerit.

Scholion.

142. Cum igitur iam non solum sit euictum, aquam in tubo circulari, in quo ad pares altitudinis gradus caloris sit diuersus, in aequilibrio consistere non posse, sed etiam ipsum motum inde genitum determinauerimus; probe tenendum est hoc tantum euenire, si totus tubus sit aqua repletus; si enim minor aquae copia ei sit infusa, ea semper eiusmodi situm habere poterit, in quo perpetuo acquiescat. In quo certe ingens paradoxon agnosci debet, quod dum in eiusmodi tubo vacuum aliquod spatium admittitur, semper aequilibrium dari possit, id omni vacuo remoto subito tollatur, ac necessario motus oriri debeat; multo maius autem hoc fiet paradoxon, cum ostendero etiam admisso spatio ab aqua vacuo, dummodo sit minimum, aequilibrium excludi, ita vt quoties illud vacuum certa quadam quantitate fuerit minus, tum semper necessario motus generetur, quomodocunque aqua tn tubo sit disposita sin autem id vacuum ista quantitate fuerit maius, tum semper aquae eiusmodi situs tribui queat, in quo perpetuo acquiescat. Maxime igitur operae pretium erit, vt hoc insigne paradoxon accuratissime euoluamus.

Pro-

## Problema 66.

143. Sit tubus circularis in plano verticali positus vbique eiusdem amplitudinis, calor vero maximus in A, minimus in B versetur, vt recta AB sit diameter horizontalis. Quod si iam huius tubi tantum portio MN aquam contineat, eius motum inuestigare. Tab. VI. Fig. 66.

### Solutio.

Sit radius circuli $CA = CB = 1$, amplitudo tubi vbique eadem $\omega = ff$; calor autem ita comparatus, vt in loco quocunque S posito arcu $AS = s$ si densitas aquae $q = 1 - \alpha \cos. s$. Iam elapso tempore $= t$ occurret aqua tubo infusa tpatium MN, vocemusque arcus $AM = M$ et $AN = n$; ac qrimo quidem perpendendum est, aquae massam perpetuo eandem manere, cum igitur in S sit densitas $q = 1 - \alpha \cos. s$ massa aquae quae tubi portionem AS esset impletura, erit $\int q ds = s - \alpha \sin. s$, vnde colligimus aquae portionem MN implentis massam fore $= n - m - \alpha(\sin. n - \sin. m)$, quae cum sit constans ponatur $= 2e$. In hunc finem statuatur:

$$m - \alpha \sin. m = u - e \text{ et } n - \alpha \sin. n = u + e$$

et quia $\alpha$ est fractio minima habebimus proxime:

$$m = u - e + \alpha \sin.(u - e) \text{ et } n = u + e + \alpha \sin.(u + e),$$

vbi obseruo si totus tubus esset aqua repletus, fore $n = m + 2\pi$ ideoque $2e = 2\pi$ seu $e = \pi$, ita vt tubus eatenus non sit totus aqua repletus, quatenus arcus $e$ mi-

 nor

nor est semiperipheria circuli $\pi$ radio existente $= 1$. Cum nunc sit $z = \sin. s$ erit $\int q\,dz = \sin. s - \frac{1}{2}\alpha s - \frac{1}{4}\alpha \sin. 2s$, et posita pressione in S $= p$ habebitur:

$$2gp = \Delta : t - 2g(\sin. s - \tfrac{1}{2}\alpha s - \tfrac{1}{4}\alpha \sin. 2s) - \frac{vv}{1 - \alpha \cos. s} - \frac{s\,dv}{dt},$$

vnde pressio pro vtroque termino M et N colligi poterit; siue autem praeter aquam in tubo insit vacuum siue aër, semper pressiones in M et N aequales sint necesse est; ex quo fiet:

$$\left.\begin{array}{l} + 2g(\sin. n - \tfrac{1}{2}\alpha n - \tfrac{1}{4}\alpha \sin. 2n) + \dfrac{vv}{1 - \alpha \cos. n} + \dfrac{n\,dv}{dt} \\ - 2g(\sin. m - \tfrac{1}{2}\alpha m - \tfrac{1}{4}\alpha \sin. 2m) - \dfrac{vv}{1 - \alpha \cos. m} - \dfrac{m\,dv}{dt} \end{array}\right\} = 0.$$

Ex hac aequatione primum colligere licet, sub quibus conditionibus aequilibrium locum habere queat. Si enim hoc statu adsit aequilibrium, oportet sit tam $v = 0$, quam $\frac{dv}{dt} = 0$, quod fieri nequit nisi sit:

$$\sin. n - \sin. m - \frac{\alpha}{2}(n - m) - \tfrac{1}{4}\alpha(\sin. 2n - \sin. 2m) = 0.$$

Quare quoties huic aequationi satisfieri potest, aequilibrium dabitur; contra vero necessario motus exorietur Statim autem patet, si sit $n = 2\pi + m$, hanc aequationem neutiquam subsistere, neque propterea aequilibrium locum habere posse. Statuamus ergo $n = 2\pi + m - \delta$, atque aequilibrium postulat hanc aequationem:

$$\sin.(m - \delta) - \sin. m - \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \delta) - \tfrac{1}{4}\alpha(\sin.(2m - \delta) - \sin. 2m) = 0.$$

Sumamus $\delta$ valde paruum, eritque

$$-\delta \cos. m - \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \delta) + \tfrac{1}{4}\alpha\delta \cos. 2m = 0,$$

vnde

vnde deducitur proxime $\cos. m = \frac{-\alpha(2\pi - \delta)}{2\delta}$; nisi ergo sit
$$\alpha(2\pi - \delta) < 2\delta \text{ seu } \delta > \frac{2\alpha\pi}{2+\alpha};$$
aequalibrium plane locum habere nequit.

Siue autem aequilibrium excludatur siue aqua ab alia causa fuerit agitata, motus ex superiori aequatione definiri poterit. Introducta nempe noua variabili $u$, vt sit:
$$m = u - e + \alpha \sin.(u - e) \text{ et } n = u + e + \alpha \sin.(u + e) \text{ erit}$$
$$\sin. m = \sin.(u - e) + \tfrac{1}{2}\alpha \sin. 2(u - e);$$
$$\cos. m = \cos.(u - e) - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \cos. 2(u - e);$$
$$\sin. n = \sin.(u + e) + \tfrac{1}{2}\alpha \sin. 2(u + c);$$
$$\cos. n = \cos.(u + e) - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \cos. 2(u + e);$$
$$\sin. 2m = \sin. 2(u - e) - \alpha \sin.(u - e) + \alpha \sin. 3(u - e);$$
$$\sin. 2n = \sin. 2(u + e) - \alpha \sin.(u + e) + \alpha \sin. 3(u + e).$$
Porro cum celeritas in M sit $= \frac{v}{1 - \alpha \cos. m}$ ex promotione momentanea concluditur temporis elementum $dt = \frac{dm(1 - \alpha \cos. m)}{v}$ factaque substitutione fit $dt = \frac{du}{v}$. Quia deinde est proxime $\frac{1}{1 - \alpha \cos. n} = 1 + \alpha \cos. \cos. n$, nostra aequatio induet hanc formam
$$2g(\sin. n - \sin. m - \tfrac{1}{2}\alpha(n - m) - \tfrac{1}{4}\alpha(\sin. 2n - \sin. 2m))$$
$$+ \alpha vv(\cos. n - \cos. m) + \frac{v\,dv}{du}(n - m) = 0.$$
Iam vero ex superioribus formis elicitur:
$$\sin. n - \sin. m = 2 \sin. e \cos. u + \alpha \sin. 2e \cos. 2u;$$
$$n - m = 2e + 2\alpha \sin. e \cos. u;$$
$$\cos. n - \cos. m = 2 \sin. e \sin. u - \alpha \sin. 2e \sin. 2u;$$
$$\sin. 2n - \sin. 2m = 2 \sin. 2e \cos. 2u;$$

facta

facta ergo substitutione prodibit:

$$2\,vdv\,(e + \alpha \sin. e \cos. u) - 2\,\alpha vvdu \sin. e \sin. u$$
$$+ 2gdu\,(2 \sin. e \cos. u - \alpha e + \tfrac{1}{2}\alpha \sin. 2e \cos. 2u) = 0,$$

quae per $e + \alpha \sin. e \cos. u$ multiplicata integrabilis redditur:

$$vv\,(e + \alpha \sin. e \cos. u)^2 + 2g\!\int\! du\,(2e \sin. e \cos. u - \alpha ee$$
$$+ \tfrac{1}{2}\alpha e \sin. 2e \cos. 2u + 2\alpha \sin. e^2 \cos. u^2) = C,$$

ita vt hinc prodeat

$$vv = \frac{C - 4g.e \sin e \sin. u + 2\alpha geeu - 2\alpha gu \sin. e^2 - \frac{1}{2}\alpha ge \sin. 2e \sin. 2u - \alpha g \sin. e^2 \sin. 2u}{(e + \alpha \sin. e \cos. u)^2},$$

seu

$$vv = \text{Const.} - \frac{4g}{e} \sin. e \sin. u + \frac{8\alpha g}{ee} \sin. e \sin. u + 2\alpha gu - \frac{2\alpha gu}{ee} \sin. e^2$$
$$- \frac{\alpha g \sin. 2e}{2e} \sin. 2u - \frac{\alpha g}{ee} \sin. e^2 \sin. 2u.$$

### Coroll. 1.

144. Si ponamus $e = \pi$, vt tubus fiat aqua plenus, quem casum quidem iam supra enodauimus, aequatio hic inuenta in hanc abit formam $vv = C + 2\alpha gu$, vnde fit

$$dt = \frac{du}{\sqrt{(C + 2\alpha gu)}} \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{\alpha g}\sqrt{(C + 2\alpha gu)} = \frac{v}{\alpha g},$$

ita vt sit $v = \alpha gt$, vti supra inuenimus.

### Coroll. 2.

145. Pro limite ad quem vsque aequilibrium locum habere potest inuenimus $\delta = \frac{2\alpha\pi}{2+\alpha}$, vnde fit $m = \pi$ vel $m =$ [illegible] $\pi$, et $n = \pi - \frac{2\alpha\pi}{2+\alpha} = \frac{2-\alpha}{2+\alpha}\pi$. Hoc casu inferior semicirculus totus aqua plenus, superior vero aquam continebit vsque ad $Dd$ existente $BD = \frac{2\alpha}{2+\alpha}\pi$; qui est extremus status aequilibrii.

Co-

Coroll. 3.

146. Hinc sequitur, si portio tubi aqua destituta fuerit maior quam $\frac{2\alpha}{2+\alpha}\pi$, tum semper aequilibrium exhiberi posse, sin autem illa portio minor sit quam $\frac{2\alpha}{2+\alpha}\pi$, tum aequilibrio nullus plane locus relinquitur sed aqua quasi sponte motum concipiet.

Scholion.

147. Paradoxon ergo supra memoratum ita resoluitur, vt quando tubus non omnino aqua est plenus, in eoque spatium vacuum relinquitur, aequilibrium quidem semper locum habere possit, dummodo hoc spatium vacuum non fuerit valde paruum. Datur enim terminus quidam valde exiguus et a discrimine inter maximam minimamque aquae densitatem pendens, quo si spatium illud vacuum fuerit minus, aequilibrium penitus excludatur, et aqua in tubo contenta, quemcunque situm tenuerit, necessario ad motum concitetur. Cum cognitio huius termini maximi sit momenti, eum accuratius ex aequatione differentiali inter $v$ et $u$ definiamus et quia nouimus tum tubum fere esse plenum, ponamus pro hoc termino esse $e = \pi - \varepsilon$, existente $\varepsilon$ arcu minimo atque vt tam $v$ quam $\frac{dv}{du}$ euanescat, oportet sit:

$$2\varepsilon \cos. u - \alpha\pi + \alpha\varepsilon - \alpha\varepsilon \cos. 2u = 0 \text{ seu}$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha\pi}{2\cos. u + \alpha - \alpha \cos. 2u},$$

quae

quae expressio minima reddi debet, vt valor pro $\varepsilon$ minimus etiam nunc aequilibrium admittens obtineatur. Sumi igitur debet $u = 0$, vnde fit $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha\pi$ tum autem hoc aequilibrii statu extremo reperitur,

$$m = -\pi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi = -(1 - \tfrac{1}{2}\alpha)\pi \text{ et } n = (1 - \tfrac{1}{2})\pi,$$

vt sit longitudo venae aqueae in tubo contentae

$$MN = n - m = 2(1 - \tfrac{1}{2}\alpha)\pi = 2\pi - \alpha\pi;$$

ideoque spatium vacuum $= \alpha\pi$; quod in aequilibrio ita locum B vbi densitas est maxima occupabit, vt altera extremitas infra punctum B altera supra id cadat intervallo $\frac{1}{2}\alpha\pi$; quae determinatio accuratior est ea, quae in coroll. 2. circa spatium BD est data, etiamsi aequilibrium in quouis situ proximo aeque subsistere queat.

## Problema 67.

Tab. VI. Fig. 67 148. Si tubus in se rediens habuerit figuram quamcunque, gradusque caloris in eo vtcunque diversus, vt aqua qua eum penitus repletum assumimus, in aequilibrio consistere nequeat: motum in ea genitum determinare.

## Solutio.

Sit in A calor maximus ideoque densitas minima, quae ponatur $= 1$, ibique sit tubi amplitudo $= ff$; in loco B vero sit calor minimus ideoque densitas maxima $= 1 + \alpha$. Consideretur nunc locus tubi quicunque S, et ponatur in eius directrice longitudo $AS = s$, amplitudo $Ss = \omega$, et al-

altitudo supra planum horizontale fixum $= z$; quod planum per ipsum punctum A ducere licet, densitas vero ibidem sit $= q$. Iam elapso tempore $= t$, aqua eiusmodi motum acquisierit, vt in A celeritas in plagam AS, sit $= v$, ideoque in S futura sit $s = \frac{ffv}{q\omega}$. Quodsi ergo statuamus pressionem in S $= p$, hanc supra elicuimus aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q dz - \frac{f^4 vv}{q\omega\omega} - f^4 vv \int \frac{d\omega}{q\omega^3} - \frac{ff dv}{dt} \int \frac{ds}{\omega},$$

quae ob $\int q dz = qz - \int z dq$ transformetur in hanc:

$$2gp = \Delta : t - 2gqz + 2g\int z dq - \frac{f^4 vv}{q\omega\omega} - f^4 vv \int \frac{d\omega}{q\omega^3} - \frac{ff dv}{dt} \int \frac{ds}{\omega},$$

vbi integralia per totam longitudinem tubi AS capi assumo, ita vt posito $s = 0$, ea quoque euanescant. Pro ipso ergo puncto A, vbi etiam fieri $z = 0$ sumimus; erit

$$2gp = \Delta : t - vv \text{ ob } q = 1 \text{ et } \omega = ff,$$

eandem autem pressionem prodire necesse est, si arcum $s$ eousque augeamus, vt confecta tota tubi longitudine punctum S in A transferatur, qualem ergo formam tum nostra aequatio sit indutura, inuestigari oportet. Ac primo quidem obseruo si amplitudo tubi vbique esset eadem $\omega = ff$, tum formulam $ff\int \frac{ds}{\omega}$ longitudinem totius tubi in se redeuntis esse expressuram, quatenus ergo amplitudo variabilis $\omega$ fuerit vel maior vel minor quam $ff$, eatenus valor istius integralis vel minor erit vel maior illa longitudine tota. Posita ergo tota hac longitudine $= a$, statuatur integrale per totum tubum expansum $ff\int\frac{ds}{\omega}=\lambda a$. Deinde integrale $\int\frac{d\omega}{q\omega^3}$ per totum tubum extensum vel iterum euanescit, vel certum quendam valorem induit, prout binae variabiles $q$ et $\omega$ inter se fuerint comparatae, ponamus ergo valorem integralis $\int\frac{d\omega}{q\omega^3}$ per totum tubum extensi $=\frac{\mu}{f^4}$. Integralis autem $\int zdq$ valor diligentiorem inuestigationem postulat; sumatur in tubo alius locus S′ vbi densitas aquae eadem sit $=q$ atque in loco S, ibi autem altitudo super plano horizontali fixo sit $=z'$. Quia vero ab A ad S progrediendo quantitas $q$ augebatur, vlterius autem cursu per B vsque ad S′ instituto, quantitas $q$ decrescit pro puncto S′ loco $dq$ scribere debemus $-dq$, ita vt binis tubi elementis in S et S′ iunctim sumtis habeatur $(z-z')dq$, et nunc integrale $\int(z-z')dq$ ab A tantum vsque B extendi oportet. Hunc in finem sumta recta CA $=$ densitati minimae 1, et CB $=$ maximae $1+\alpha$ notentur quotcunque densitates mediae CE, CF, CG, CH etc. atque in tubo notentur bina loca coniugata EE′, FF′, GG′, HH′ in quibus illae densitates insint, tum cuique excessui, quo altitudo punctorum E, F, G, H superat altitudinem punctorum E′, F′, G′, H′ statuantur applicatae aequales $Ee$, $Ff$, $Gg$, $Hh$, et curuae per puncta $e, f, g, h$ ductae area A$efgh$BA dabit verum valorem integralis $\int zdq$ quatenus per totam tubi longitudinem extenditur. Statuamus hunc valorem $\int zdq = h$ et facto integro circuitu pro pressione in A habebimus:

Tab. VI. Fig. 68.

2gp

$$2gp = \Delta : t + 2gh - vv - \mu vv - \frac{\lambda a dv}{dt},$$

qui valor cum ante inuento $2gp = \Delta : t - vv$ aequalis esse debeat pro motu determinando nascetur haec aequatio:

$$\lambda adv + \mu vvdt = 2ghdt \text{ seu } dt = \frac{\lambda a dv}{2gh - \mu vv},$$

quae tres suppeditat casus considerandos;

I. Si $\mu = 0$, erit $t = \frac{\lambda av}{2gh}$ ideoque $v = \frac{2gh}{\lambda a} t$.

II. Si $\mu > 0$; ponatur $\mu = \frac{2gh}{cc}$, fit $dt = \frac{\lambda acc dv}{2gh(cc - vv)}$, hincque integrando $t = \frac{\lambda ac}{4gh} l \frac{c+v}{c-v}$, siquidem posito $t = 0$ esse debet $v = 0$ faciamus $\frac{4gh}{\lambda ac} = \gamma$, eritque $v = \frac{e^{\gamma t} - 1}{e^{\gamma t} + 1} c$. Hoc ergo casu celeritas $v$ quidem crescit sed non vltra terminum $c$ quem demum elapso tempore infinito assequitur. Hinc casus primus nascitur si $c = \infty$.

III. Si $\mu < 0$ ponatur $\mu = \frac{-2gh}{cc}$, vt fiat $dt = \frac{\lambda acc dv}{2gh(cc+vv)}$, hincque integrando $t = \frac{\lambda ac}{2gh}$ Ang. tang. $\frac{v}{c}$: vnde elicimus $v = c$ tang. $\frac{2gh}{\lambda ac} t$. Hoc ergo casu elapso tempore finito $t = \frac{\pi . \lambda ac}{4gh}$, celeritas $v$ iam fit infinita.

## Exemplum.

149. Sit tubus circularis in plano verticali positus aqua plenus radio existente $CA = CB = c$. Sumto autem angulo $ACS = \phi$, sit in S densitas aquae $q = 1 - \alpha \cos.\phi$, et amplitudo tubi $\omega = ff(1 - \beta \sin.\phi)$, altitudo vero super plano horizontali $z = c \sin.\phi$ existente arcu $AS = c\phi = s$. Cum iam pro motu in plagam AECD, posita, in sectione Tab. VI. Fig. 64.

 vbi

vbi foret densitas $=1$ et amplitudo $=ff$, celeritate $=v$, haec inuenta sit aequatio:

$$0=2g\int zdq-f^4vv\int\frac{d\omega}{q\,\omega^3}-\frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}.$$

his integralibus per totum circulum extensis singula seorsim euoluamus. Ac primo quidem ob $z=c\sin.\phi$ et $dq=\alpha d\phi\sin.\phi$ erit

$$\int zdq=\alpha c\int d\phi\sin.\phi^2=\tfrac{1}{2}\alpha c\int d\phi(1-\cos.2\phi)=\tfrac{1}{2}\alpha c(\phi-\tfrac{1}{2}\sin.2\phi),$$

cuius valor per totum circulum ponendo $\phi=2\pi$ expansum praebet $\int zdq=\pi\alpha c$. Deinde ob $ds=cd\phi$ et $\omega=ff(1-\beta\sin.\phi)$ fit:

$$ff\int\frac{ds}{\omega}=c\int\frac{d\phi}{1-\beta\sin.\phi}=\frac{c}{\sqrt{(1-\beta\beta)}}(\text{Ang. sin.}\sqrt{(1-\beta\beta)}$$
$$-\text{Ang. sin.}\frac{\cos.\phi\sqrt{(1-\beta\beta)}}{1-\beta\sin.\phi}.$$

Sit $\psi$ angulus iste cuius sinus est $\frac{\cos.\phi\sqrt{(1-\beta\beta)}}{1-\beta\sin.\phi}$, et posito $\phi=90^\circ$ fit $\psi=0$, posito autem $\phi=\pi$ fit:

$$\psi=-\text{Ang. sin.}\sqrt{(1-\beta\beta)},$$

posito porro $\phi=270^\circ$ fit $\psi=-\pi$, posito denique $\phi=2\pi$ colligitur:

$$\psi=-2\pi+\text{Ang. sin.}\sqrt{(1-\beta\beta)},$$

ex quo pro toto circulo sit $ff\int\frac{ds}{\omega}=\frac{2\pi c}{\sqrt{(1-\beta\beta)}}$, quod idem clarius fit si $\beta$ vt valde paruum spectemus, tum enim erit:

$$\int\frac{d\phi}{1-\beta\sin.\phi}=\int d\phi(1+\beta\sin.\phi)=\phi-\beta\cos.\phi+\beta,$$

cuius valor posito $\phi=2\pi$ fit $=2\pi$. Pro tertia formula integrali ob $d\omega=-\beta ffd\phi\cos.\phi$ et $q=1-\alpha\cos.\phi$ erit

$f^4f$

$$f^4\int\frac{d\omega}{q\omega^3} = -\beta\int\frac{d\Phi\cos.\Phi}{(1-\alpha\cos.\Phi)(1-\beta\sin.\Phi)^3}.$$

Consideremus iterum $\beta$ perinde ac $\alpha$ valde paruum vt denominator censeri possit $= 1 - \alpha\cos.\Phi - 3\beta\sin.\Phi$, hincque habeatur:

$$f^4\int\frac{d\omega}{q\omega^3} = -\beta\int d\Phi\cos.\Phi\,(1+\alpha\cos.\Phi + 3\beta\sin.\Phi) \text{ seu}$$

$$f^4\int\frac{d\omega}{q\omega^3} = -\beta\,(\sin.\Phi + \tfrac{1}{2}\alpha\Phi + \tfrac{1}{4}\alpha\sin.2\Phi - \tfrac{3}{4}\beta\cos.2\Phi + \tfrac{3}{4}\beta),$$

cuius valor posito $\Phi = 2\pi$ fit $= -\pi\alpha\beta$. Quocirca nostra aequatio differentialis ita se habebit:

$$0 = 2\pi\alpha gc + \pi\alpha\beta vv - \frac{2\pi c}{\sqrt{(1-\beta\beta)}}\cdot\frac{dv}{dt},$$

vbi quia ipsius $\beta$ altiores dimensiones negligimus loco $\sqrt{(1-\beta\beta)}$ scribere licet 1, ita vt sit

$$dt = \frac{c\,dv}{\alpha(gc+\frac{1}{2}\beta vv)}.$$

Cum ergo facta comparatione cum forma supra exhibita sit $\lambda a = c$, $2gh = \alpha gc$ et $\mu = -\frac{1}{2}\alpha\beta$, si $\beta$ sit numerus positiuus ex casu tertio fit $cc = \frac{2gh}{-\mu} = \frac{2gc}{\beta}$ et $c = \sqrt{\frac{2gc}{\beta}}$ vnde colligitur:

$$v = \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\beta}}\,\text{tang.}\,\frac{\alpha\gamma\sqrt{\beta}}{\sqrt{2gc}}\,t,$$

ita vt post tempus $t = \frac{\pi\sqrt{2gc}}{2\alpha g\sqrt{\beta}}$ sec. celeritas iam fiat infinita.

At si $\varepsilon$ sit numerus negatiuus seu amplitudo tubi in S generaliter $\omega = ff(1+\varepsilon\sin.\Phi)$ comparatio cum casu secundo institui debet; ex quo ob $\lambda a = c$; $2gh = \alpha gc$; et $\mu = \frac{1}{2}\alpha\varepsilon$ fit $cc = \frac{2gc}{\varepsilon}$, et $c = \sqrt{\frac{2gc}{\varepsilon}}$. Capiatur ergo numerus $\gamma = \frac{2\alpha g\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2gc}}$ et ad datum tempus $t$ erit $v = \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{e^{\gamma t}-1}{e^{\gamma t}+1}$,

quae

quae ergo celeritas elapso demum tempore infinito fit $= \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\beta}}$.

## Coroll. 1.

150. Ex casu $\omega = ff(1 - \beta \sin.\Phi)$ discimus in genere, si tubi pars superior AEB angustior sit quam pars inferior ADB, tum motum aquae tantopere accelerari, vt iam tempore finito celeritas fiat infinita. Ex altero vero casu $\omega = ff(1 + \beta \sin.\Phi)$ colligimus in genere, si tubi pars superior AEB fuerit amplior inferiori ADB, tum motum multo minus accelerari, vt elapso adeo tempore infinito celeritas non sit certum limitem superatura.

## Coroll. 2.

151. Pro formula integrali $f^4 \int \frac{d\omega}{q\omega^3}$ si tantum $\alpha$ vt fractio valde parua spectetur, ipsi $\beta$ valorem quemcunque vnitate saltem minorem relinquendo, calculo subducto reperitur eius valor per totum circulum extensus $= \frac{-\pi\alpha\beta}{(1-\beta\beta)\sqrt{(1-\beta\beta)}}$ hincque motus hac aequatione exprimetur:

$$dt = \frac{2(1-\beta\beta)c\,dv}{2\alpha gc(1-\beta\beta)^{\frac{3}{2}} + \alpha\beta vv}.$$

## Coroll. 3.

152. Calculo hinc vlteriori subducto pro amplitudine $\omega = ff(1 - \beta \sin.\Phi)$ reperitur

$$v = (1-\beta\beta)^{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\beta}} \text{tang.} \frac{\alpha g\sqrt{\beta}}{(1-\beta\beta)^{\frac{3}{4}}\sqrt{2gc}} t,$$

pro

pro altero vero casu amplitudinis $\omega = ff(1 + \mathfrak{G} \sin. \Phi)$ sumto

$$\gamma = \frac{2\alpha g \sqrt{\mathfrak{G}}}{(1 - \mathfrak{G}\mathfrak{G})^{\frac{1}{4}} \sqrt{2gc}} \text{ erit } v = (1 - \mathfrak{G}\mathfrak{G})^{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} \cdot \frac{e^{\gamma t} - 1}{e^{\gamma t} + 1}.$$

## Scholion.

153. Quando vti in exemplo allato vsu venit, quantitates variabiles $q$, $z$ et $\omega$, sunt certae functiones continuae ipsius $s$ inuestigatio secundum praecepta analyseos consueta institui potest. Verum si tubus constet pluribus partibus nulla continuitatis lege inter se connexis, tum pro singulis partibus valores formularum integralium, quae in motus determinationem ingrediuntur, seorsim inuestigari ac deinceps colligi oportet. Directrice tubi AB in directum extensa pro eius portione EF dentur in E altitudo $EH = h$, amplitudo tubi $EN = ffn$ et densitate aquae $EM = m$ in F vero sint eadem elementa $EH' = h'$; $EN' = ffn'$, et $EM' = m'$, quae ab E et F ita vniformiter mutari assumamus vt scalae ea repraesentantes $HZH'$, $NON'$ et $MQM'$ pro lineis rectis haberi possint. Hinc $EF = e$, et $ES = x$, vt sit $ds = dx$, erit $SZ = z = h + \frac{(h' - h)x}{e}$; $SO = \omega = ff\left(n + \frac{(n' - n)x}{e}\right)$ et $SQ = q = m + \frac{(m' - m)x}{e}$. Quamobrem si differentias $h' - h$, $n' - n$ et $m' - m$ vt valde paruas spectemus, inueniemus primo $ff\int \frac{ds}{\omega} = \int \frac{e\,dx}{en + (n' - n)x}$, quod per spatium $EF = e$ expansum fit: Tab. VI. Fig. 69.

$$= \frac{e}{n' - n} l \frac{n'}{n} = e\left(\frac{1}{n} - \frac{(n' - n)}{2nn} + \frac{(n' - n)^2}{3n^3} - \text{etc.}\right)$$

Deinde

Deinde est

$$\int z\,dq = \frac{m'-m}{e}\int dx\left(h + \frac{(h'-h)x}{e}\right),$$

quod integrale pariter per totum spatium EF $= e$ expansum praebet:

$$\int z\,dq = \tfrac{1}{2}(h'+h)(m'-m).$$

Denique formula $f^4 \int \frac{d\omega}{q\,\omega^3}$ abit in hanc formam:

$$\frac{n'-n}{e\,n^2}\left(\frac{x}{m\,n} - \frac{3(n'-n)}{2\,e\,m\,n\,n}\,xx - \frac{(m'-m)}{2\,e\,m\,m\,n}\,xx \text{ etc.}\right);$$

sicque istius formulae valor per spatium EF extensus erit

$$\frac{n'-n}{m\,n^3} - \frac{3(n'-n)^2}{2\,m\,n^4} - \frac{(m'-m)(n'-n)}{2\,m\,m\,n^3},$$

cuius sufficit partem sumsisse primam $\frac{n'-n}{m\,n^3}$. Exempla non addo, quia praecipua phaenomena ex figura circulari satis iam sunt facta manifesta.

EXA-