

R E M A R Q U E S

S U R

L'EFFET DU FROTTEMENT
DANS L'ÉQUILIBRE. (*)

P A R M. L. E U L E R.

I.

Il semble d'abord, que le frottement ne regarde en aucune maniere l'état d'équilibre des corps, & que son effet est nécessairement attaché au mouvement. Aussi voyons-nous que les Auteurs, tant qu'ils expliquent les loix de l'équilibre, ne font aucune mention du frottement, & qu'ils n'en tiennent compte que lorsqu'ils traitent du mouvement. Cependant, pour qu'un corps soit mis en mouvement, il ne suffit pas que les forces dont il est sollicité ne soient plus en équilibre, mais il faut que l'excès soit capable de vaincre le frottement. Donc un corps demeure en repos ou en équilibre, non seulement tant que les forces dont il est sollicité se tiennent en équilibre, mais aussi quand l'équilibre des forces est troublé, pourvu que l'excès ne soit pas assez grand pour vaincre le frottement. D'où il est évident, que le frottement influe beaucoup sur l'équilibre des corps, entant que l'état d'équilibre ne differe pas de l'état de repos; & qu'on dit, qu'un corps se trouve en équilibre, tant qu'il demeure en repos.

2. Considérons le cas où le poids P repose sur le plan incliné AB , étant retiré selon la direction DE parallèle au plan par une force suffisante; & l'on prouve, que cette force DE doit être au poids P , com-

Planche IX.
Fig. 1.

(*) Lu le 16 Mars 1758.



comme la hauteur AC est à la longueur AB du plan. S'il n'y avoit point de frottement, ce seroit sans doute l'unique cas de l'équilibre, en sorte que, si la force DE étoit moindre que $\frac{AC}{AB} \cdot P$, le poids P descendroit sur le plan; & si elle étoit plus grande, le poids monteroit vers A . Mais, à cause du frottement, le poids P demeurera en repos, quoique la force DE soit ou plus grande ou plus petite que $\frac{AC}{AB} \cdot P$, pourvu que la différence soit plus petite qu'il ne faudroit pour vaincre le frottement. Donc, si nous posons le frottement $= F$, tant que la force DE subsiste entreces deux limites $\frac{AC}{AB} \cdot P + F$ & $\frac{AC}{AB} \cdot P - F$, le poids P demeurera toujours en repos.

3. Or l'expérience nous a donné à connoître, que le frottement tient toujours un certain rapport à la pression du corps contre le plan, qui est pour la plupart comme 1 à 3. Donc, puisque la pression du poids P sur le plan incliné est $= \frac{BC}{AB} \cdot P$, en prenant pour le dit rapport en général comme λ à 1, on aura le frottement $F = \lambda P \cdot \frac{BC}{AB}$, où il y a à peu près $\lambda = \frac{1}{3}$. Et partant, le poids P demeurera en repos, tant que la force DE subsiste entre ces deux limites $\frac{AC + \lambda \cdot BC}{AB} P$ & $\frac{AC - \lambda \cdot BC}{AB} P$. Le frottement est donc cause, que l'état d'équilibre admet une grande étendue par rapport à la force DE : d'où l'on peut dire que la force requise DE pour maintenir le corps P en équilibre, est indéterminée.

4. S'il s'agit seulement d'empêcher que le corps P ne glisse en bas, il suffit d'employer une force DE , qui ne soit pas moindre que $\frac{AC - \lambda BC}{AB} P$. Donc, si AC est égal à $\lambda \cdot BC$, ou moindre, le corps



corps n'a pas besoin de soutien, & il demeurera de soi-même en son lieu: mais, si $AC > \lambda \cdot BC$, le corps doit être retenu, & s'il étoit attaché en *E* par le fil *DE*, ce fil éprouveroit un effort égal à $\frac{AC - \lambda \cdot BC}{AB} \cdot P$, qui est la plus petite force capable d'arrêter le

corps. Car, quoiqu'une plus grande force l'arrête également, il est naturel que le fil *DE* ne soutienne que la plus petite; puisque, s'il est assez fort pour résister à cette plus petite force, il n'y a pas à craindre qu'il soit rompu. D'où l'on voit que, s'il faut déterminer la force dont le fil *DE* est tendu par le poids *P*, quoique cette question appartienne à la doctrine de l'équilibre, on ne la sauroit résoudre sans avoir égard au frottement.

Fig. 2.

5. Mais je me propose d'examiner ici un cas plus curieux: je suppose le poids *P* attaché à une corde, qui soit appliquée autour d'un corps fixe *ALMNB* d'une figure quelconque, où il s'agit de déterminer la force dont l'autre bout de la corde *BD* doit être tiré, afin que le poids *P* soit maintenu en repos. Or d'abord, s'il n'y avoit point de frottement, & que la corde pût librement glisser autour du corps *ALMNB*, il est évident que la force dont on doit tirer le bout de la corde *BD*, devroit être égale au poids *P*, de sorte que, si cette force étoit moindre, le poids *P* descendroit en bas, & si elle étoit plus grande, le poids en seroit élevé. Mais le frottement changera la question; & pour empêcher que le corps *P* ne descende, une plus petite force à appliquer en *D* suffira; or il faudra y en appliquer une plus grande qu'au cas précédent, quand on veut faire monter le poids *P*. Toute autre force contenue entre ces deux limites, maintiendra le poids en repos.

6. Pour connoître ces limites, cherchons la plus petite force à appliquer en *D*, qui puisse encore arrêter le poids *P* en repos, de sorte que, si elle étoit tant soit peu plus petite, le poids *P* descendroit actuellement. Il faut donc que cette force soit égale à l'excès du poids *P* sur tous les obstacles du frottement, qui s'opposeroient à la descente



actuelle du poids. Or le frottement dépend en chaque point M , où la corde est appliquée au corps fixe, de la pression dont la corde y est apprimée, en sorte que, si la pression en M étoit $= \Pi$, le frottement y feroit équivalent à une force $= \lambda \Pi$, dont la corde feroit tirée en arriere vers N selon sa propre direction. Mais on ne sauroit déterminer la pression sans supposer connues toutes ces forces du frottement; & partant tout revient à la solution de ce probleme, que je m'en vais développer.

Fig. 3.

7. Partageons toute la corde en élémens infiniment petits & égaux entr'eux, dont deux quelconques soient mM & $M\mu$, qu'on nomme $mM = M\mu = ds$. Soit la pression en M , où je considere comme réunie toute la force dont l'élément mM est apprimé, $= R ds$; & le frottement causé par cet élément sera $= \lambda R ds$, qu'il faut considérer comme une force appliquée en M suivant la direction $M\mu$, opposée à Mm , puisqu'on peut négliger l'angle que ces deux élémens font ensemble. Cette force diminuera la tension de la corde, de sorte qu'en posant la tension de l'élément $Mm = T$, celle de l'élément $M\mu$ sera $= T - \lambda R ds$; or celle-ci étant $= T + dT$, nous aurons $dT = - \lambda R ds$, & partant $T = \text{Const.} - \lambda \int R ds$. Pour définir cette constante, on n'a qu'à considérer, qu'au commencement en A , où l'intégrale $\int R ds$ évanouit, la tension doit être égale au poids P , d'où l'on obtient cette valeur déterminée $T = P - \lambda \int R ds$.

8. Concevons en M appliquée une force Mr , égale & opposée à la pression de l'élément Mm , de sorte que cette force soit $Mr = R ds$, & il faut qu'elle soit en équilibre avec les autres forces qui agissent sur le point M . Or, à cause de la tension, le point M est tiré selon Mm par la force $= T$, & selon $M\mu$ par la force $T + dT - \lambda R ds = T$. Ces deux forces étant donc égales, & la force Mr perpendiculaire, si nous posons le rayon de courbure en $M = r$, l'équilibre exige cette proportion: $R ds : T = ds : r$, de sorte que $T = Rr$. Or nous venons de trouver $T = P - \lambda \int R ds$, d'où nous tirons par la différentiation $R dr + r dR = - \lambda R ds$, & de là

là $\frac{dR}{R} = -\frac{dr}{r} - \frac{\lambda ds}{r}$: donc $\int R = C - \int r - \lambda \int \frac{ds}{r}$. Soit e le nombre, dont le logarithme est $= 1$, pour avoir $Rr = T = e^{C - \lambda \int ds} : r = P e^{-\lambda \int ds} : r$ en déterminant la constante de telle sorte, que la tension en A devienne égale au poids P.

9. Ici il faut remarquer que $\int \frac{ds}{r}$ exprime l'amplitude de l'arc Fig. 1.

AM, ou bien l'angle MRA, que fait la perpendiculaire MR à la corde en M avec la droite AR, qui est perpendiculaire au commencement A de la corde. Posons donc cet angle ARM $= \phi$, qu'il faut exprimer par l'arc d'un cercle, dont le rayon est $= r$, qui en est la mesure: & la tension de la corde en M sera $= P e^{-\lambda \phi}$; la pression y étant $= P d\phi e^{-\lambda \phi} = R ds = T \frac{ds}{r}$. Par conséquent, si nous nommons l'amplitude de la corde entière ALMNB $= \gamma$, la tension à l'autre bout B sera $= P e^{-\lambda \gamma}$, & une telle force appliquée en D sera suffisante pour maintenir le poids P en équilibre; en sorte que, si cette force étoit moindre, le corps P descendroit actuellement. Cependant une force plus grande appliquée en D ne fera que maintenir le poids P en repos, jusqu'à ce qu'elle surpasse la quantité $P e^{\lambda \gamma}$, où elle fera monter le poids P; donc le poids P demeurera en repos, tant que la force appliquée en D est entre les limites $P e^{-\lambda \gamma}$ & $P e^{\lambda \gamma}$.

10. De là on voit que la figure du corps ALMNB n'entre en considération, que par son amplitude, ou l'angle que font entr'elles les perpendiculaires AC & BC, tirées aux extrémités A & B. Donc, si les deux bouts de la corde en A & B deviennent parallèles, la corde faisant un demi-tour sur le corps fixe, quelle que soit sa figure, de sorte qu'au lieu de la force appliquée en D, on puisse concevoir un poids Q, ces deux poids pourront être en équilibre, quoiqu'ils soient inégaux entr'eux. Fig. 4.



la mesure est la demi-circonférence d'un cercle π , le rayon étant $\equiv 1$, l'équilibre aura lieu, tant que le poids Q n'est pas ou plus petit que $P e^{-\lambda\pi}$, ou plus grand que $P e^{\lambda\pi}$. Si nous supposons $\lambda \equiv \frac{1}{3}$, à cause de $\pi \equiv 3,14159$, ces deux limites seront pour le poids Q :

la moindre $\equiv 0,35092 P$, la plus grande $\equiv 2,84965 P$.

11. Dans ce cas donc, le plus petit poids Q qui soit capable de soutenir le poids P , n'est qu'environ un tiers du poids P , ou à peu près $\equiv \frac{1}{3} P$: & partant, si la corde étoit attachée en Q à un clou, ce clou ne soutiendrait qu'environ le tiers du poids P . C'est le frottement de la corde sur le demi-tour $ALMNB$, qui cause cette diminution considérable, puisque sans le frottement le poids Q devrait être égal au poids P . Or, si une si petite force est suffisante pour empêcher la descente du poids P , il en faut employer une d'autant plus grande pour faire monter le poids P : car, pour cet effet, il faut que le poids Q soit plus grand que $2,84965 P$, ou à peu près que $\frac{3}{2} P$: s'il n'y avoit point de frottement, il suffiroit que le poids Q surpassât le poids P . Donc, s'il s'agit seulement d'arrêter un grand poids, le frottement est d'un grand secours, en diminuant la force requise à ce dessein: mais, d'un autre côté, l'élévation du poids P exige une force d'autant plus grande.

Fig. 5.

12. De là on peut conclure, combien la force requise pour arrêter un poids donné, peut être diminuée par le frottement, quand la corde fait plusieurs tours autour d'un tambour fixe, qu'on peut regarder comme un cylindre, puisque la figure n'y contribue rien. Considérons au lieu de cette force un poids Q attaché à l'autre bout de la corde, dont la direction étant verticale, la corde occupera sur le tambour, ou un demi-tour, comme dans le cas exposé, où nous avons $\gamma \equiv \pi$: ou elle occupera un tour & demi, ce qui donne $\gamma \equiv 3\pi$; ou deux tours & demi, ce qui donne $\gamma \equiv 5\pi$; ou trois tours & demi, ce qui donne $\gamma \equiv 7\pi$, & ainsi de suite. Dans ces cas, le plus petit poids Q capable d'arrêter le poids P , sera pour le premier

$Q \equiv$

$Q = e^{-\lambda\pi} P$; pour le second $Q = e^{-3\lambda\pi} P$; pour le troisieme $Q = e^{-5\lambda\pi} P$; pour le quatrieme $Q = e^{-7\lambda\pi} P$, & ainsi de suite.

13. Supposons, comme il arrive ordinairement, $\lambda = \frac{1}{3}$, & nous aurons pour chaque nombre de tours & demi-tours comme la table suivante fait voir.

Lorsque la corde fait	la force requise pour maintenir le poids P.	Lorsque la corde fait	la force requise pour maintenir le poids P.
$\frac{1}{2}$ tour	0,350920 P	1 tour	0,123145 P
$1\frac{1}{2}$ tour	0,043214 P	2 tours	0,015165 P
$2\frac{1}{2}$ tours	0,005322 P	3 tours	0,001867 P
$3\frac{1}{2}$ tours	0,000655 P	4 tours	0,000230 P
$4\frac{1}{2}$ tours	0,000081 P	5 tours	0,000028 P
$5\frac{1}{2}$ tours	0,000010 P	6 tours	0,000003 P.

La figure représente le cas de quatre tours & demi; donc, si le poids P étoit de 1000 livres, pour empêcher sa descente, il suffiroit d'employer en Q un poids de $\frac{8}{100000}$, ou d'une douzieme partie d'une livre: & s'il y avoit un tour de plus, la centieme partie d'une livre seroit suffisante.

14. Cette diminution dépend principalement de la valeur du nombre λ , que j'ai supposé, conformément à plusieurs expériences, $= \frac{1}{3}$; si ce nombre étoit $= \frac{1}{4}$, comme il arrive quelquefois quand les surfaces sont assez bien polies, cette diminution deviendroit considérablement plus petite. Pour le cas de $4\frac{1}{2}$ tours, le poids Q devoit être $= 0,000854 P$, & partant $10\frac{1}{2}$ fois plus grand que dans le cas $\lambda = \frac{1}{3}$. Réciproquement donc, ayant trouvé par l'expérience le poids Q, on pourra déterminer très exactement par là le nombre λ . Supposons que, pour le cas de $4\frac{1}{2}$ tours, on ait trouvé le poids $Q = 0,00025 P$, ou $Q = \frac{1}{4000} P$; & puisque $\frac{1}{4000} = e^{-9\lambda\pi} 1$ ou $e^{9\lambda\pi} =$



$= 4000$, on aura $9\lambda\pi = \frac{l4000}{le}$, ou bien $\lambda = \frac{3,6020600}{0,4342945.9\pi}$
 $= 0,29334$, ce qui feroit à peu près $\lambda = \frac{2}{7}$.

15. Cependant on ne fauroit trop compter sur cette conclu-
 sion, puisque j'ai négligé dans le calcul le propre poids de la corde, qui
 peut causer un changement sensible dans la tension; qu'il vaudra la pei-
 ne d'examiner. Soit donc la corde partout également épaisse, & que
 Fig. 1. & 3. le poids, dont la longueur est $= c$, soit $= C$: de là le poids d'un

élément ds , fera $= \frac{Cds}{c}$. Posant comme ci-dessus l'amplitude de
 l'arc $ALM = \phi$, le poids de l'élément Mm donnera une pression $=$
 $\frac{Cds}{c} \sin \phi$, & une force selon la direction de la corde $= \frac{Cds}{c} \cos \phi$,
 dont le frottement doit être diminué. Soit Rds la partie de la pres-
 sion, qui est encore inconnue, & la pression entière de l'élément Mm
 fera $= Rds + \frac{Cds}{c} \sin \phi$, d'où résulte la force du frottement, qui
 agit selon la direction $M\mu = \lambda Rds + \frac{\lambda Cds}{c} \sin \phi$, d'où il faut
 retrancher la force $\frac{Cds}{c} \cos \phi$; de sorte que la force qui tire selon
 $M\mu$ est $= \lambda Rds + \frac{\lambda Cds}{c} \sin \phi - \frac{Cds}{c} \cos \phi$.

16. Soit maintenant la tension de la corde dans l'élément Mm
 $= T$, & dans l'élément suivant $M\mu = T + dT$, & de là on au-
 ra $dT = -\lambda Rds - \frac{\lambda Cds}{c} \sin \phi + \frac{Cds}{c} \cos \phi$. Or la con-
 dition de l'équilibre fournit comme ci-dessus cette équation, en posant
 le rayon de courbure en $M = r$, de sorte que $\frac{ds}{r} = d\phi$;

$T =$

$$T = Rr + \frac{Cr}{c} \sin \phi, \text{ ou } R + \frac{C}{c} \sin \phi = \frac{T}{r},$$

d'où nous tirons cette équation

$$dT = -\frac{\lambda T ds}{r} + \frac{C ds}{c} \cos \phi, \text{ ou } dT + \lambda T d\phi = \frac{C ds}{c} \cos \phi,$$

qui étant multipliée par $e^{\lambda\phi}$ & intégrée donne :

$$e^{\lambda\phi} T = \frac{C}{c} \int e^{\lambda\phi} ds \cos \phi, \text{ & partant}$$

$$T = \frac{C}{c} e^{-\lambda\phi} \int e^{\lambda\phi} ds \cos \phi,$$

où il faut prendre l'intégrale de telle sorte que, posant l'amplitude $\phi = 0$, la tension en A devienne $= P$, en négligeant le poids du bout de la corde AP, ou en le comprenant dans le poids P.

17. Ici il est évident que la tension de la corde T dépend non seulement de l'amplitude ϕ , mais aussi de la figure du tambour. Supposons cette figure cylindrique, dont le rayon soit $= a$, & puisque l'arc AM $= s$ devient $a\phi$, on aura $ds = a d\phi$, & partant pour les tambours cylindriques la tension T, qui répond à l'amplitude ϕ , sera exprimée par cette équation :

$$T = \frac{Ca}{c} e^{-\lambda\phi} \int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi.$$

Or, ayant $\int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi = e^{\lambda\phi} \sin \phi - \lambda \int e^{\lambda\phi} d\phi \sin \phi$, & $\int e^{\lambda\phi} d\phi \sin \phi = -e^{\lambda\phi} \cos \phi + \lambda \int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi$, nous en tirons $\int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi = e^{\lambda\phi} \sin \phi + \lambda e^{\lambda\phi} \cos \phi - \lambda \lambda \int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi + \text{const.}$ & partant

$$\int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi = \text{const.} + \frac{e^{\lambda\phi} (\sin \phi + \lambda \cos \phi)}{1 + \lambda\lambda}.$$

18. Après avoir trouvé cette intégrale, nous acquerrons la tension cherchée :

$$T = \text{const.} \frac{Ca}{c} e^{-\lambda\phi} + \frac{Ca (\sin \phi + \lambda \cos \phi)}{(1 + \lambda\lambda) c},$$

où, posant $\phi = 0$, nous aurons pour la détermination de la constante :

$$P = \text{const.} \frac{Ca}{c} + \frac{\lambda Ca}{(1 + \lambda\lambda) c},$$

dont la valeur étant substituée fournit

$$T = P e^{-\lambda\phi} - \frac{\lambda Ca e^{-\lambda\phi}}{(1 + \lambda\lambda) c} + \frac{Ca (\sin \phi + \lambda \cos \phi)}{(1 + \lambda\lambda) c}.$$

Si le poids de la corde évanouit, de sorte que $C = 0$, on aura comme ci-dessus $T = P e^{-\lambda\phi}$; mais le poids de la corde change de telle sorte la tension, qu'elle devient

$$T = P e^{-\lambda\phi} + \frac{Ca}{(1 + \lambda\lambda) c} \sin \phi + \lambda \cos \phi - \lambda e^{-\lambda\phi}.$$

19. Si l'on multiplie cette valeur de T par $\frac{ds}{r} = d\phi$, à cause de $r = a$, on aura la pression de la corde dans son élément $Mm = ds = a d\phi$, où il faut remarquer que notre calcul ne sauroit subsister, à moins que cette pression ne soit positive; car, si elle devenoit quelque part négative, rien n'empêcheroit que la corde n'abandonnât là le tambour: aussi le frottement ne sauroit alors devenir négatif, comme le calcul le supposeroit. Ou bien il faudroit concevoir qu'il y eût autour du tambour un cylindre creux, ou un tuyau, qui tint attachée partout la corde au tambour, ou qui empêchât qu'elle ne s'en détache. Or la pression ne devient négative qu'à moins que la tension T ne le devienne: & partant les cas que nous devons exclure de notre calcul, ne se trouvent que là où l'expression de T obtient une valeur négative. Mais, avant que cela arrive, il faut que la valeur de T

éva-

évanouisse, & partant c'est depuis cet endroit que nous devons abandonner le calcul.

20. Supposons $\lambda = \frac{1}{3}$, & considérons le cas où la corde fait un demi-tour sur le tambour. Puisqu'alors $\phi = 180^\circ = \pi$, & partant $\sin \phi = 0$, $\cos \phi = -1$, & $e^{-\lambda \phi} = 0,35092$, la tension à l'autre bout B, ou le poids Q, sera

$$Q = 0,35092 P - 0,405276 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Le poids de la corde diminue donc le poids Q, requis pour arrêter le poids P; & la force Q évanouiroit tout à fait, si la corde étoit si pesante, qu'il fût $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{cP}{a}$; ou bien, si un morceau de la corde, dont la longueur seroit égale au rayon du tambour a , avoit un poids qui fût au poids P comme 13 à 15; dans ce cas, la corde ALMNB simplement couchée sur le tambour, sans qu'on lui applique en B aucune force, arrêteroit le poids P; & si la corde étoit plus pesante, le poids P seroit d'autant mieux arrêté, & on le pourroit encore augmenter. Mais, si la corde est moins pesante, il faut toujours appliquer en B un contrepoids Q, qui ne soit pas plus petit que celui que je viens de déterminer.

21. Que dans la même hypothèse $\lambda = \frac{1}{3}$, la corde remplisse sur le tambour un tour & demi, de sorte que $\phi = 3\pi$, & nous aurons $\sin \phi = 0$ & $\cos \phi = -1$, ensuite $e^{-\lambda \phi} = 0,043214$, d'où la grandeur du contrepoids Q devient:

$$Q = 0,043214 P - 0,3129642 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Donc, tandis que $C < \frac{1}{2} \cdot \frac{cP}{a}$, ou que le poids d'un morceau de la corde égal au rayon du tambour, est plus petit que $\frac{1}{2} P$, il faut appliquer un contrepoids Q. Mais, si ce morceau de la corde pèse



$\frac{4}{3}P$, ou davantage encore, la seule corde, sans qu'on ait besoin de la charger d'un contrepoids, arrêtera le poids P ; & il seroit superflu de lui donner une plus grande longueur, vu que l'excès sur un tour & demi ne demeureroit plus attaché au tambour. On peut remarquer ici qu'une corde beaucoup plus mince que dans le cas précédent, est capable de soutenir le poids P sans un contrepoids, & cela dans la raison de $\frac{1}{3}$ à $\frac{4}{3}$ ou de 44 à 7.

22. Quand la corde remplit sur le tambour deux tours & demi, à cause de $e^{-\lambda\varphi} = 0,005322$, le plus petit contrepoids Q se trouve

$$Q = 0,005322 P - 0,3015966 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit sur le tambour trois tours & demi, à cause de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000655$, le plus petit contrepoids sera

$$Q = 0,000655 P - 0,3001965 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit sur le tambour quatre tours & demi, à cause de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000081$, le plus petit contrepoids sera

$$Q = 0,000081 P - 3,0000243 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit sur le tambour cinq tours & demi, à cause de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000010$, le plus petit contrepoids sera

$$Q = 0,000010 P - 0,3000030 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Pour six tours & demi on trouve

$$Q = 0,00000122 P - 0,300000366 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Pour



Pour sept tours & demi on trouve

$$Q = 0,000000151 P - 0,3000000453 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

23. En général, si la corde remplit sur le tambour n tours & demi, à cause de $\phi = (2n + 1)\pi$, le plus petit contrepoids sera

$$Q = e^{-\lambda(2n+1)\pi} P - \frac{\lambda(1 + e^{-\lambda(2n+1)\pi})}{1 + \lambda\lambda} \cdot \frac{Ca}{c},$$

qui sera donc d'autant plus diminué, que le tambour est gros. Si l'on veut que le contrepoids évanouisse, on aura cette équation:

$$(1 + \lambda\lambda)c e^{-\lambda(2n+1)\pi} P = \lambda a (1 + e^{-\lambda(2n+1)\pi}) C,$$

d'où, si l'on connoit le nombre λ & les quantités a , c , C , P , on déterminera le nombre des tours n de cette sorte:

$$e^{-\lambda(2n+1)\pi} = \frac{\lambda a C}{(1 + \lambda\lambda)c P - \lambda a C}, \text{ ou bien}$$

$$2n + 1 = \frac{l((1 + \lambda\lambda)c P - \lambda a C) - l\lambda a C}{\lambda \pi l e}.$$

Soit c la longueur de la corde, qui pese autant que le poids P , qu'il faut soutenir, sans avoir besoin de contrepoids, & on aura

$$2n + 1 = l \frac{(1 + \lambda\lambda)c - \lambda a}{\lambda a} : \lambda \pi l e \text{ ou } \pi l e = 1,3643766.$$

24. Pour donner un exemple, supposons qu'on employe une telle corde, dont 2000 pieds pesent autant que le poids à soutenir, & que le diametre du tambour soit un pied, ou $a = \frac{1}{2}$: soit de plus le nombre qui résulte du frottement, $\lambda = \frac{1}{3}$, & on aura

$$2n + 1 = \frac{l 13332 \frac{1}{3}}{0,4547922} = \frac{4,1248953}{0,4547922} = 9 \text{ assez exactement,}$$

Mm 3

donc

donc $n = 4$: de sorte que dans ce cas quatre tours & demi sont suffisans pour soutenir le poids. Si le frottement, étoit moindre & qu'il fût $\lambda = \frac{1}{4}$, on trouveroit

$$2n + 1 = \frac{116999}{0,3410941} = \frac{4,2304234}{0,3410941} = 12\frac{1}{2}.$$

Ici au lieu de $12\frac{1}{2}$ il faut prendre 13, & $n = 6$; de sorte que ce moindre frottement exige six tours & demi. Puisque a est ordinairement fort petit par rapport à c , on voit qu'il est assez exactement

$$2n + 1 = \frac{(1 + \lambda\lambda)c}{\lambda a} : \lambda\pi l e \text{ ou } e^{\lambda(2n+1)\pi} = \frac{(1 + \lambda\lambda)c}{\lambda a}.$$

Du reste il est évident, qu'un fort modique nombre de tours est toujours suffisant pour soutenir les plus grands poids, sans avoir besoin d'un contrepoids.

