

CAPVT V.  
DE  
AEQVILIBRIO FLVIDORVM  
AD CENTRA VIRIVM FIXA  
SOLLICITATORVM.

Problema 13.

109.

**S**i vis acceleratrix, qua singulae fluidi particulae ad centrum virium vrgentur, sit functioni cui-cunque distantiae ab hoc centro proportionalis, defini-re fluidi statum aequilibrii.

Solutio.

Sit A centrum virium per quod transeat pla-num illud fixum AXY, ad quod situm singula-rum fluidi particularum Z referamus per ternas coordinatas AX = x, XY = y et YZ = z sitque in Z pressio = p et densitas fluidi = q. Statuatur nunc puncti Z a centro virium distantia AZ = v, vt sit  $vv = xx + yy + zz$ , et sit V ea functio di-stantiae v, quae vim acceleratricem in Z secundum ZA exprimit. Haec vis secundum ternas coordi-natas resoluta dat vires sequentes:

Tab. VII.  
Fig. 17.

D d d 2

sec.

sec. direct. XA vim  $= \frac{v \cdot x}{v}$  vt fit  $P = -\frac{v \cdot x}{v}$

sec. direct. YX vim  $= \frac{v \cdot y}{v}$  vt fit  $Q = -\frac{v \cdot y}{v}$

sec. direct. ZY vim  $= \frac{v \cdot z}{v}$  vt fit  $R = -\frac{v \cdot z}{v}$ .

Quocirca ex probl. 3. pro statu aequilibrii fluidi hanc habebimus aequationem.

$$dp = -\frac{q \cdot v}{v} (x dx + y dy + z dz)$$

quae ob  $v dv = x dx + y dy + z dz$  contrahitur in hanc :

$$dp = -q V dv.$$

Quod si iam densitas  $q$  ita fit comparata, vt haec aequatio integrationem admittat, quod non euenit, nisi  $q$  fit functio binarum quantitatum  $p$  et  $v$ , status aequilibrii locum habet, eiusque natura per integram huius aequationis exprimetur.

### Coroll. 1.

Tab. VII. **PRO.** Vt ergo fluidum ad aequilibrium se  
Fig. 18 componat, densitas  $q$  tantum a distantia a centro virium AZ  $= v$  et a pressione  $p$  in loco Z pendere debet; quia autem tum ex aequatione  $dp = -q V dv$  pressio  $p$  per solam distantiam  $v$  determinatur, etiam densitas per solam distantiam  $v$  determinabitur.

### Coroll. 2.

**PRO.** Si ergo fluidum fuerit in aequilibrio, tum in aequalibus a centro A distantis hoc est per totam

totam superficiem sphaerae radio  $AZ = v$  circa centrum descriptae ubique eadem pressio  $p$  eademque densitas  $q$  reperietur, id quod de omnibus superficiibus sphaericis concentricis est intelligendum.

Coroll. 3.

112. Quod si igitur in distantia  $AC = b$  pressio evanescit, per totam quoque superficiem sphaericam  $CEGF$  evanescat necesse est, haecque superficies fluidi suprema est censenda. Unde patet fluidum in aequilibrio constitutum necessario figuram sphaericam induere, in cuius centro positum sit centrum virium.

Coroll. 4.

113. Si pressio in  $C$  evanescat, erit in loco centro propiore  $Z$ , posito intervallo  $CZ = b - v = u$ , pressio  $p = \int qV du$ , integrali hoc ita accepto, ut evanescat posito  $u = 0$ , hoc autem integrale, exprimit pondus columnae fluidae ex  $C$  in  $Z$  protensae, quo ea a vi centripeta ad  $Z$  vrgetur: Quare ad centrum  $A$  accedendo pressio  $p$  continuo augebitur.

Scholion 1.

114. Ratiocinium hoc clarius reddetur, si columnae cylindricae  $CZ$  basin tribuamus  $= ff$ , ut eius volumen ob altitudinem  $CZ = u$  sit  $ffu$ , et incrementum eius, dum altitudo elemento  $du$  augeatur,

D d d 3. tur,

tur,  $=ffdu$ ; massae ergo elementum ob densitatem in  $Z=q$  erit  $=ffqdu$ , quod in vim acceleratricem  $V$ , qua deorsum sollicitatur ductum, dabit ponderis incrementum  $=ffqVdu$ ; ex quo totius columnae  $CZ$  pondus erit  $=ffsqVdu$ , quod si ponatur  $=P$ , pressio in  $Z$  erit  $p = \frac{P}{JJ}$ ; unde perspicuum est pressionem in  $Z$  ponderi columnae fluidae  $CZ$  esse proportionalem, siquidem haec columna a suprema fluidi superficie capiatur. Quoniam igitur haec columna quo magis versus centrum  $A$  extenditur eo fit necessario ponderosior, simul intelligitur, quo propius ad centrum  $A$  accedatur, eo magis pressionem  $p$  augeri debere. Atque hinc etiam vis, quam quodvis corpus solidum fluido immersum ab eius pressionibus sustinet, colligi debet, quippe quae aequalis et contraria est ei vi, qua massa fluida in locum corporis solidi substituta a vi centripeta vrgetur. Hincque ex vi, qua corpus solidum ipsum a vi centripeta sollicitatur, iudicare licebit, vtrum id in fluido sit quieturum, an vero vel fursum vel deorsum pellatur? prouti haec vi illi fuerit vel aequalis; vel ea minor maiorue: quin etiam fieri potest, si ambae vires non per idem corporis punctum transeant, vt ei interea motus quoque gyrotrius imprimatur.

### Scholion 2.

115. Si ergo densitas in locis a centro  $A$  aequae remotis non sit aequalis status aequilibril locum

cum habere nequit, qualem autem tum motum adipiscatur fluidum, sequenti modo colligere licebit. Ponamus in locis  $b$  et  $\xi$  densitatem minorem esse quam in locis  $c$  et  $\gamma$ , fluidum autem ita esse dispositum, ut in  $b$  et  $c$  pressiones sint aequales, ideoque fluidum in tubo  $bc$  in aequilibrio versetur; quo posito pressio ad  $\xi$  maior erit pressione ad  $\gamma$ , quoniam pro illa obtinenda a pressione in  $b$  pondus columnae rarioris  $\xi b$  subtrahi debet, pro hac vero densioris  $\gamma c$ . Fluidum ergo per tubum superiorem  $\xi \gamma$  a loco, ubi densitas est minor defluet in locum, ubi densitas est maior, qui fluxus simul ac inceperit aequilibrium in tubo inferiori  $bc$  turbabitur, hincque fluidum densius ad rarius fluere incipiet. Idem motus prodibit si primum fluidum in tubo superiori  $\xi \gamma$  in aequilibrio fuisse assumamus. Quocirca tuto concludimus, si in regione  $\xi b$  densitas minor fuerit quam in regione  $\gamma c$ , tum infra fluidum ex  $c$  in  $b$  supra autem contra ex  $\xi$  in  $\gamma$  fluere debere; qui motus tamdiu durabit, quoad aequilibrium locum inuenire queat; ac si ob calorem ad  $b \xi$  minorem densitas ibi constanter sit maior quam ad  $c \gamma$  hic motus perpetuo durabit, qui casus omnino conuenit cum illo, quem supra euoluimus.

### Scholion 3.

116. Pro diuersa ergo fluidi indole circa aequilibrium sequentia sunt notanda. Primo si fluidum

dum sit homogeneum densitatem habens inuariabilem, veluti aqua eodem vbique caloris gradu praedita, cum se ad aequilibrium composuerit, in aequalibus a centro virium distantis pressio vbique est eadem: si autem fluidum sit heterogeneum, cuius tamen singulae partes nullam densitatis mutationem patiuntur, aequilibrium subsistere nequit, nisi in aequalibus a centro virium distantis densitas vbique sit eadem, at tum etiam pressio ibidem aequalis sit necesse est. Idem tenendum est, si idem fluidum ob diuersos caloris gradus ratione densitatis discrepet, tum enim ad aequilibrium requiritur, vt in aequalibus a centro virium distantis vbique idem reperiatur caloris gradus, quod nisi eueniat, aequilibrium locum habere nequit, sed in regionibus inferioribus fluxus dabitur perpetuus a loco frigidiori in calidiorum, in superioribus vero contra a loco calidiorum in frigidiorum. Quod si fluidum aëri sit simile et densitatem habeat variabilem non solum a gradu caloris sed etiam a pressione pendentem; tum aequilibrium dari nequit, nisi per singulas superficies sphaericas circa centrum virium descriptas vbique idem caloris gradus regnet; tum vero etiam per totam cuiusque harum superficierum expansionem et densitas et pressio eadem deprehendetur. In his igitur omnibus casibus maxime interest fluidi massam in eiusmodi strata diuidi, quae a centro virium aequè distent, ideoque figuram habeant sphaericam, quae strata aequilibrata vel libellata vocare

care licet; simili modo quo casu ante tractato, vbi directiones grauitatis inter se erant parallelae, haec firata plana et horizonti parallela accipi debebant.

Problema 14.

117. Si singulae fluidi partes ad duo pluraue centra virium simul sollicitentur viribus acceleratricibus, quae vtcunque a distantis pendeant, conditiones inuestigare, sub quibus fluidum in aequilibrio consistere queat.

Solutio.

Sint plura centra virium fixa C, C', C'' vt Tab. VIII. cunq̄ue disposita siue in eodem plano siue secus; ac Fig. 19. fluidi consideretur elementum quodcunque in Z situm, vbi densitas sit =  $q$ , et pressio =  $p$ . Ponantur huius puncti Z distantiae a singulis virium centris:

$$CZ = v; C'Z = v'; C''Z = v''$$

et vires acceleratrices, quibus ad ea seorsim sollicitatur, sint V, V', V''. Harum autem virium effectus ratione aequilibrii seorsim definire licet, quoniam supra vidimus in genere pro aequilibrio esse debere  $\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz$ , vbi singulae vires resolutae in P, Q, R partes peculiare inducunt. Calculo ergo vt ante subducto pro singulis viribus ternae coordinatae ex calculo excedent, et ad hanc aequationem peruenietur:

$$\frac{dp}{q} = -Vdv - V'dv' - V''dv''$$

Tom. XIII. Nou. Comm.

E e e

vnde

vnde patet si densitas  $q$  fuerit vel constans, vel a sola pressione  $p$  pendeat, integrationem succedere, ideoque aequilibrium locum habere, cuius indoles hac aequatione exprimetur:

$$\int \frac{d p}{q} = \text{Const.} - \int V d v - \int V' d v' - \int V'' d v''$$

vbi notari meretur formulam integram  $\int V d v$  representare actionem vis  $V$ ; quare si omnium virium iunctim consideratarum actio tota statuatur  $= W$ , vt fit

$$W = \int V d v + \int V' d v' + \int V'' d v''$$

habebitur  $\int \frac{d p}{q} = \text{Const.} - W$ . Notio autem huius actionis ita est stabilienda, vt pro quouis spatii puncto, quod virium actioni subicitur, certum fortia- tur valorem longitudine seu altitudine quadam exprimendum, siquidem vires acceleratrices  $V, V', V''$  grauitati homogeneae numeris absolutis indicantur; ita vt actio virium in quouis puncto euadat pressioni homogenea, quippe quam etiam certa altitudine re- praesentamus. Actione ergo in calculum introducta erit aequatio differentialis pro statu aequilibrii  $d p = -q d W$ , vnde si densitas  $q$  non solum a pressione  $p$  sed etiam a loco pendeat, veluti si cuilibet loco certus caloris gradus conueniat, tum aequilibrium locum habere nequit, nisi calor vnice ab actione virium  $W$  pendeat, ita vt in omnibus punctis, vbi eadem actio viget, ibi etiam calor sit idem; tum autem in iisdem locis quoque densitas et pressio in aequilibrio fiet eadem.

Coroll.

## Coroll. 1.

118. Totum ergo negotium eo redit, ut omnia puncta, ubi actio virium est eadem probe notentur, quae cum pro quavis actionis quantitate  $W$  in certam quandam superficiem cadant, talis superficies stratum aequilibratum repraesentabit; ita ut in quolibet strato aequilibrato actio virium ubique sit eadem.

## Coroll. 2.

119. Ad aequilibrium igitur id maxime requiritur, ut per singula strata aequilibrata fluidum ubique eandem habeat densitatem, tum vero etiam pressio ubique erit eadem in quolibet scilicet strato aequilibrato. Vnde perspicuum est extremam seu supremam fluidi superficiem secundum huiusmodi stratum aequilibratum se componere debere; ex quo haec strata ad libellam disposita sunt censenda.

## Coroll. 3.

120. Si unicum sit centrum virium, omnia strata aequilibrata figuram habent sphaericam centro virium descriptam, ideoque inter se erunt parallela. Sin autem duo pluraue adsint centra virium, figura singulorum stratorum aequilibratorum admodum fit plerumque irregularis, neque ea amplius inter se erunt parallela, sed potius crassitie inaequabili praedita.

## Scholion I.

121. Duæ hic occurrunt notiones maxime notatu dignae, quarum prior est notio actionis virium, quæ in quoduis punctum agunt, atque alibi ostendi hanc notionem in principio minimæ actionis, maximi esse momenti, ex quo si forte ea quibusdam geometris vel nimis metaphysica vel adeo nimis sterilis fuerit visa, hic certe summam eius utilitatem agnoscent. Dum enim vires quaecunque acceleratrices in punctum definitum agunt, ibi certam exerunt actionem quæ convenientissime eo modo, quo hic usus sum, repræsentatur, dum scilicet quaelibet vis per differentiale directionis suæ multiplicata integratur, et hæc integralia ex singulis viribus nata in vnâ summam colliguntur; vnde conceptus metaphysicus formari poterit. Ita hic littera  $W$  dum exprimit summam formularum  $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$  designabit actionem virium  $V, V', V''$  punctum  $Z$ , in quo fluidi elementum concipimus, sollicitantium. Parum autem refert, quantam constantem ob integrationes introducamus, quoniam hanc notionem eo dirigimus, vt omnia loca, in quibus eadem inest actio definiamus; interim tamen cum elicuerimus  $\int \frac{dp}{q} = \text{Const.} - W$  pro quolibet casu hæc constans facile determinatur. Hinc igitur nata est altera notio stratorum æquilibratorum, quorum quoduis eam vniuersam superficiem complectitur, cuius omnibus punctis eadem actio

actio conuenit; quantae autem sit vtilitatis haec notio in aequilibrio fluidorum definiendo, hic iam satis copiose est declaratum: at vero etiam in motu fluidorum inuestigando aequae est necessaria, vti ex sequentibus patebit. Determinatio autem horum stratorum aequilibratorum pro qualibet virium sollicitantium hypothese, ad problema geometricum reducitur, cuius solutio autem plerumque ita sit difficilis, vt stratorum horum figura inde difficulter cognosci queat. Quoniam vero huiusmodi casus vix in rerum natura occurrunt, operae haud est pretium hunc laborem suscipere; quin potius vires reales, quae in fluida terrestria agunt, eorumque statum aequilibrii afficiunt, sum exploraturus.

### Scholion 2.

122. Cum scilicet omnia, quae nobis circa aequilibrium et motum fluidorum explorare licet, potissimum ad fluida super terra constituta referri conueniat, aquam nimirum et aërem, perpendendum est a cuiusmodi viribus haec fluida praeter grauitatem sollicitentur. Ac primo quidem occurrit vis centrifuga, qua haec fluida ob motum vertiginis terrae, ab eius axe repelluntur, quam ipsis ab axe distantis proportionalem esse constat. Etsi enim consideratio huius vis, ob motum vnde nascitur neutiquam ad theoriam aequilibrii pertinet; tamen quia eius actio est perennis, statim ac fluida sese in certum statum composuerint, hic status vt

aequilibrium spectari potest, siquidem is perfecte cum eo conuenire censendus est, quem eadem fluida induerent, si terra quiescente singula fluidorum elementa praeter grauitatem continuo a viribus illis ab axe repellerentur. Quamobrem quomodo status aequilibrum in hac hypothese comparatus esse debeat, plurimum intererit hic inuestigare, cum conclusiones etiam si fictioni innitantur, tamen minime a veritate aberrare sint putandae. Deinde etiam constat tam solem quam lunam vi sua attractrice in fluida terrae effectum satis notabilem exserere; qui etiam si cum continuo motu sit coniunctus, tamen ita ad statum aequilibrum reuocari potest, vt conclusiones vel non multum a veritate abhorreant vel saltem ad motus cognitionem deinceps inuestigandam maxime sint necessariae. Quare etsi sol et luna quotidie circa terram circumferantur, conueniet quaestionem ita constitui, vt terra in quiete spectata, sol vel luna perpetuo eidem terrae puncto imminere concipiatur, et status aequilibrum fluidorum ab hac vi cum grauitate coniuncta productus definiatur. Tum enim his astris etiam procedentibus intelligetur, quemnam statum fluida quouis momento induere conentur; tametsi enim nunquam in aequilibrium sint peruentura, tamen cognitio aequilibrum quod quasi affectant, maximam habebit vtilitatem.

Pro-

Problema 15.

123. Si praeter vim centripetam, qua fluidum ad punctum fixum C vrgetur, singulae particulae Z ab axe fixo AB per centrum C transeunte repellantur viribus distantiae XZ ab axe proportionalibus definire statum aequilibrii, fluidi cuiuscunque. Tab. VIII.  
Fig. 20.

Solutio.

Sit fluidi elementum quodcunque in Z, cuius densitas sit  $=q$  et pressio  $=p$ ; ponatur eius distantia a centro CZ  $=v$ , cuius functioni V aequalis sit vis acceleratrix, qua id elementum ad C vrgetur, huius ergo vis actio in punctum Z erit  $=\int Vdv$ , partem constituens actionis totius ante littera W indicatae. Altera vero pars oritur ex vi qua elementum Z ab axe AB repelli assumimus, sit ergo perpendicularum ex Z ad axem ductum ZX  $=x$ , et vis ipsa acceleratrix repellens  $=\frac{x}{f}$ , quoniam distantiae x proportionalis statuitur. Iam ex praecedentibus perspicuum est, si haec vis contrariam haberet directionem ZX, eam spectari posse ut vim centripetam ad centrum in directione ZX infinite remotum tendentem, sicque eius actio foret  $=\int \frac{x dx}{f} = \frac{x^2}{2f}$ : nunc igitur quia vis ab axe repellit, actio statuenda est  $= -\frac{x^2}{2f}$ , ita ut actio tota pro elemento in Z sit  $=\int Vdv - \frac{x^2}{2f}$  loco litterae W. substi-

substituenda, ex quo pro flatu aequilibrum haec habetur aequatio

$$\int \frac{d p}{q} = \text{Const.} - \int V d v + \frac{\infty \infty}{2 f} \text{ seu } d p = q \left( \frac{\infty d \infty}{f} - V d v \right)$$

vnde patet nisi densitas  $q$  sit constans vel a sola pressione  $p$  pendens, eam insuper ipsam actionem  $W$  inuoluere debere cum alioquin aequilibrium subsistere non possit. Pro aequilibrio ergo necesse est, ut densitas  $q$  sit vel constans, vel functio solius pressionis  $p$ , vel functio duarum quantitatum  $p$  et  $W = \int V d v - \frac{\infty \infty}{2 f}$ . Si ergo calor sit variabilis, eum functionem ipsius  $W$  esse oportet, ita ut in omnibus locis, vbi actio  $W$  est eadem, hoc est in quolibet strato aequilibrato, sit idem. Tum vero ibidem et densitas et pressio eadem sit oportet; ac suprema fluidi superficies secundum tale stratum aequilibratum semper erit disposita. Pro grauitate hic functionem quandam  $V$  distantiae  $C Z = v$  introduxi quia eius indoles est ambigua; si enim in viscera terrae descendimus, haec vis ipsi distantiae proximae censetur proportionalis, sin autem supra terram per atmosphaeram ascendimus, quadrato distantiae reciproce proportionalis aestimatur: ex quo conicere licet prope superficiem quousque vel ascendere vel descendere datur, grauitatem recte constantem et vnitati aequalem poni, vnde erit  $d p = q \left( \frac{\infty d \infty}{f} - d v \right)$ , pro stratis autem aequilibratis habebitur haec aequatio  $v = \text{Const.} + \frac{\infty \infty}{2 f}$ , quae ergo exprimit naturam supremae superficiei fluidorum. Ita  
si

si femiaxis totius superficiei fit  $CA = k$  vbi  $x = 0$ ,  
 femidiameter aequatoris vbi  $v = x$ , ex hac aequa-  
 tione  $x = k + \frac{x^2}{2f}$ , definitur  $x = f - \sqrt{ff - 2fk}$  vbi  
 notetur  $f$  esse quantitatem maximam.

Coroll. 1.

124. Si ergo quaestio fit de figura oceani  
 terram cingentis, posita densitate  $q = 1$ , erit pro  
 loco sub oceano quocunque  $Z$  pressio  $p = k + \frac{x^2}{2f} - v$   
 vnde pro suprema superficiei erit  $k + \frac{x^2}{2f} - v = 0$ ,  
 vnde vt supra fit femiaxis  $CA = k$  et femidiamete-  
 ter aequatoris  $= f - \sqrt{ff - 2fk} = k + \frac{k^2}{2f} + \frac{k^2}{2ff}$  si-  
 quidem  $f$  multum superet  $k$ .

Coroll. 2.

125. Cum reuolutio terrae circa axem absol-  
 vatur tempore  $23^b, 56', 45'' = 86205''$ , pro quo  
 numero si scribamus  $v$ , et altitudinem lapsus vno  
 minuto secundo facti ponamus  $= g$  erit quantitas illa  
 $f = \frac{v^2 g}{2\pi^2}$  denotante  $\pi$  peripheriam circuli, cuius  
 diameter  $= 1$ ; ex quo colligitur  $f = 376474180.g$   
 et ob femiaxem terrae  $k = 19601352$  ped. paris. fit  
 $f = 289,95k$ , ex quo femidiameter aequatoris pro-  
 dit  $= k(1 + \frac{1}{3759}) = \frac{381}{376}k$ .

Coroll. 3.

126. Pro pressione autem atmosphaerae, si in  
 terrae superficiei sub polo ponatur altitudo barome-  
 Tom. XIII. Nou. Comm. Fff tri

tri =  $a$ , densitas aëris =  $b$ , existente densitate mercurii =  $\gamma$ , ob  $q = \frac{b\phi}{a}$  erit  $l\frac{p}{a} = \frac{b}{a} (k - v + \frac{x}{2f})$ , et vbiq; in superficie maris ob  $k + \frac{x}{2f} - v = 0$  altitudo barometri  $p$  erit eadem =  $k$ . Sub aequatore autem ob strata crassiora atmosphaera altius affurgit quam sub polis.

### Scholion.

127. Mirum hic videri non debet quod semidiameter aequatoris parte tantum  $\frac{1}{580}$  superare inventus sit semiaxem terrae, cum tamen experientia iam constet excessum ad partem  $\frac{1}{230}$  affurgere. Ratio huius discriminis in eo latet, quod hic gravitatem perpetuo ad centrum directam et a sola distantia ab eo pendentem assumimus, ita vt quomodocunque terrae figura mutetur, gravitatis tamen eadem esset mensura. Verum nunc satis euictum est gravitatem ab attractione omnium terrae partium proficisci, ideoque statim atque terrae figura sphaerica alteretur, ipsam quoque gravitatem mutationem pati, atque haec gravitatis mutatio in causa est, quod ob motum vertiginis terrae aberratio a figura sphaerica multo maior existat. Hugenus quoque qui primus figuram terrae definire ex theoria est conatus, dum ad solam vim centrifugam respexit, gravitate vt invariabili spectata eandem rationem inter axem terrae et diametrum aequatoris scilicet fere 580 : 581 elicit, ex quo calculus hic adhibitus minime suspectus videri debet. Hic autem  
locus

locus non est, vt ex vera attractionis indole calculum propius ad veritatem accommodemus, dum pro aequilibrio tam aquae quam aëris cognoscendo haec allata abunde sufficiunt. Neque etiam ei casui quo in iisdem stratis caloris gradus discrepat, immoror, cum satis constet ex superioribus, cuiusmodi motus tum oriri debeat.

Problema 16.

128. Si terrae centro C immineat in Tab. VIII.  
E siue sol siue luna siue aliud corpus attrahens Fig. 21.  
in ratione reciproca duplicata distantiarum definire statum aequilibrii fluidorum circa terrae superficiem fitorum, hoc est oceani et atmosphaerae, dum tam terra quam corpus in E sine motu spectantur.

Solutio.

Posita distantia  $CE = b$ , sit massa terrae  $= C$ , corporisque  $E = E$  ita vt in distantia quacunque  $= d$ , sit vis attrahens terrae  $= \frac{C}{d^2}$  corporis vero  $E = \frac{E}{d^2}$ . Consideretur iam fluidi elementum quodcunque in Z, cuius densitas sit  $= q$  et pressio  $= p$ ; ac vires acceleratrices quibus hoc elementum vrgetur perpendi oportet. Vocentur distantiae  $CZ = v$  et  $EZ = u$ , vt posito angulo  $ECZ = \Phi$ , sit  $uv = bb - 2bv \cos. \Phi + vv$ , ac primo punctum Z sollicitatur ad centrum C vi  $= \frac{C}{v^2}$ , quae abit in vnitatem si Z in superficie terrae ipsa capiatur; huius ergo vis actio est  $= \int \frac{C dv}{v^2} = \frac{C}{v}$  partem totius actionis

F ff 2 W

W constituens. Tum vero idem elementum Z ad E vrgetur vi  $= \frac{E}{uu}$ , cuius propterea actio est  $= \int \frac{E du}{uu} = \frac{E}{u}$ . Quoniam vero centrum terrae quod ad E incitatur vi  $= \frac{E}{bb}$ , in quiete spectatur, tanta vi singula puncta terrae in directionem contrariam vrgeri sunt censenda, hinc ducta ZY ipsi EC parallela, seu ZX ad EC normali, vt sit ZY = CX =  $v \cos. \Phi$ , punctum Z insuper sollicitari statuentum est secundum ZY vi  $= \frac{E}{bb}$ , cuius ergo actio est  $= \int \frac{E d. v \cos. \Phi}{bb} = \frac{E v \cos. \Phi}{bb}$ . Quamobrem tota actio in puncto Z erit  $W = \frac{c}{v} - \frac{E}{u} + \frac{E v \cos. \Phi}{bb}$ , sicque pro statu aequilibrii habebitur haec aequatio:

$$dp = -q \left( \frac{C dv}{vu} + \frac{E du}{uu} + \frac{E d. v \cos. \Phi}{b \cdot b} \right)$$

vbi notandum aequilibrium locum habere non posse nisi densitas  $q$  sit vel constans vel a sola pressione  $p$  pendeat, vel functio sit binarum quantitatum  $p$  et  $W$ ; tum igitur etiam tam densitas  $q$  quam pressio  $p$  certis functionibus actionis  $W$  aequabuntur. Prostratis autem aequilibratis aequatio generalis erit  $\frac{C}{v} + \frac{E}{u} - \frac{E v \cos. \Phi}{bb} = \text{Const.}$  Cum autem distantia  $b$  prae  $v$  valde sit magna, erit per approximationem

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{b} + \frac{v \cos. \Phi}{b \cdot b} + \frac{v v (3 \cos. \Phi^2 - 1)}{2 b^3} + \frac{v 3 \cos. \Phi (5 \cos. \Phi^2 - 3)}{2 b^4} + \frac{v^2 (3 5 \cos. \Phi^4 - 7 \cos. \Phi^2 + 3)}{8 b^5}$$

hincque colligitur actio tota omittis constantibus:

$$W = \frac{c}{v} - \frac{E v (3 \cos. \Phi^2 - 1)}{2 b^3} - \frac{E v^2 \cos. \Phi (5 \cos. \Phi^2 - 3)}{2 b^4} - \frac{E v^3 (3 5 \cos. \Phi^4 - 7 \cos. \Phi^2 + 3)}{8 b^5}$$

existente  $dp = -q dW$ . Notandum autem est si se-  
midia-

midiameter terrae vocetur =  $k$ , fore  $\frac{C}{kk} = 1$ , ideoque  $C = kk$ , tum vero si in E fit luna haberi proxime  $E = \frac{1}{20} C = \frac{kk}{20}$ , sin autem E fit sol eius distantia media a terra existente =  $b$ , fore  $E = \frac{16 b^3}{290. 1465^2. k^3} C = \frac{C b^3}{38804140 k^3}$  ideoque  $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{38804140 k}$  ob  $C = kk$ , dum pro luna si eius distantia a terra media ponatur =  $b = 60 k$  est  $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{17280000 k}$ .

Coroll. 1.

129. Sine ergo in E consideremus siue solem siue lunam, posito  $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{nk}$  existente pro luna  $n = 17280000$ , at pro sole  $n = 38804140$ , erit actio  $W = \frac{-kk}{v} - \frac{vv(3 \cos^2 \Phi^2 - 1)}{2nk} - \frac{v^3 \cos^2 \Phi (3 \cos^2 \Phi^2 - 3)}{2nbk}$  et pro aequilibrio habebitur haec aequatio  $dp = -q dW$ .

Coroll. 2.

130. Pro mari ergo si eius densitatem statuamus constantem  $q = 1$ , vt pressio  $p$  definiatur per altitudinem columnae aqueae, fit  $p = \text{Const.} + \frac{kk}{v} + \frac{vv(3 \cos^2 \Phi^2 - 1)}{2nk} + \frac{v^3 \cos^2 \Phi (3 \cos^2 \Phi^2 - 3)}{2nbk}$ ; qui postremus terminus tuto omitti potest, vnde pro superficie maris vbi  $p = 0$ , posito semidiametro  $CA = k$  vbi  $\Phi = 0$ , habebitur aequatio  $k + \frac{k}{n} + \frac{kk}{nb} - \frac{kk}{v} + \frac{vv(3 \cos^2 \Phi^2 - 1)}{2nk} + \frac{v^3 \cos^2 \Phi (3 \cos^2 \Phi^2 - 3)}{2nbk}$ , vnde colligitur proxime  $v = k - \frac{3kk}{2n}$ , ita vt fit  $CD = k - \frac{3k}{2n}$  existente pro luna  $\frac{3k}{2n} = 1\frac{1}{2}$  ped. pro sole vero  $\frac{3k}{2n} = \frac{3}{4}$  ped. paris.

E ff 3

Coroll.

## Coroll. 3.

131. Pro atmosphaera autem, si in A sit altitudo barometri  $= a$  et densitas aëris  $= b$  ob  $q = \frac{b \cdot p}{a}$  fit  $l \frac{p}{a} = \text{Const.} - \frac{b \cdot w}{a}$  seu  $\frac{a}{b} l \frac{p}{a} = \frac{k \cdot k}{v} + \frac{v \cdot v (3 \cdot \cos. \Phi^2 - 1)}{2 \cdot n \cdot k} - k - \frac{k}{n}$ . Vbiq; ergo in superficie terrae vbi  $v = k$  erit  $\frac{a}{b} l \frac{p}{a} = \frac{3 \cdot k \cdot \sin. \Phi^2}{2 \cdot n}$  seu  $p = a - \frac{3 \cdot b \cdot k \cdot \sin. \Phi^2}{2 \cdot n}$ . Quare in A et B barometrum tenebit maximam altitudinem in D vero minimam, differentia existente  $= \frac{1}{5000}$  ped. pro luna, at  $= \frac{1}{13333}$  ped. pro sole, quae ergo sentiri nequit.

## Scholion 1.

132. Sole ergo vel luna in E versante mare tam in A quam e regione in B intumescit, in D vero subsidit, neque tamen differentia maior foret quam  $1 \frac{1}{2}$  ped. pro luna et  $\frac{3}{4}$  ped. pro sole, siquidem haec luminaria perpetuo eidem loco A imminerent vnde si coniunctim agerent, quod fit tam in coniunctione quam in oppositione, maxima maris altitudo superaret minimam fere  $2 \frac{1}{2}$  ped. Cum autem ambo luminaria continuo ab oriente in occidentem progrediantur, facile intelligitur antequam aquae in A et B confluere queant, luminaria iam vterius esse promota, vnde fit vt in quoque loco aqua tardius intumescat, quam sol vel luna per eius zenith vel nadir transferit, idque eo magis, quo maiora impedimenta affluxui obstant, veluti si per freta vel loca minus profunda transire cogatur. Tum vero vbi

vbi affluxus iste maiori celeritate contingit, ob impetum conceptum fieri potest, vt aqua ad multo maiorem altitudinem eleuetur, quam pro ratione aequilibrii: cum enim tantum aquae affluat, quantum ad insignem maris tractum tumefaciendum sufficeret, si mare subito littoribus in angustum spatium coarctetur, omnis aqua eo affluens ad insignem altitudinem ascendere debet, quemadmodum satis nota aestus marini phaenomena declarant.

Scholion 2.

133. Videamus etiam accuratius, quemadmodum atmosphaera a tali actione afficiatur, et quanta in ea ascendendo vbique densitas et pressio sit futura. Terrae igitur superficiem sphaericam assumentes, cuius radius sit  $= k$ , si in loco quocunque a recta CE angulo  $= \Phi$  remoto per altitudinem  $= s$  ascendamus vt sit  $v = k + s$ , ex aequatione supra inventa colligimus fore proxime  $p = a - bs - \frac{3 b k \sin. \Phi^2}{2 a}$ , dum scilicet altitudo barometri in A statuitur  $= a$ , et aëris densitas  $= b$ , mercurii densitate existente  $= r$ . In altitudine ergo ista  $s$  densitas aëris erit  $q = \frac{b p}{a} = b - \frac{b b s}{a} - \frac{3 b b k \sin. \Phi^2}{2 n a}$ , vnde si in hoc loco columnam aeream consideremus cuius basis sit  $= ff$ , massa aëris in ea contenta erit  $= ff \int q ds = ff (bs - \frac{b b s s}{2 a} - \frac{3 b b k s \sin. \Phi^2}{2 n a})$ . Talis ergo columna in A vel B constituta continebit quantitatem aëris  $= ff (bs - \frac{b b s s}{2 a})$ ,  
at

at similis columna in D quantitatem aëris  $= ff(b's$   
 $-\frac{bbs}{2a} - \frac{2bbs}{2na})$  ex quo illa hanc superat quantitate  
 $= \frac{2bbs}{2na}$ . Quare necesse est ut insignis portio aëris in loca A et B affluat, in regionibus D autem atmosphaera minuatur, vnde in aere similis motus reciprocus atque in mari oriri debet neque tamen barometrum in A vel B hoc aëris augmentum indicabit, propterea quod ob vim ad E vrgentem grauitas aëris eo congesti diminuitur. Quanta autem celeritate aër versus loca A et B affluat, dum luminaria ab E promouentur, hinc minime definire, neque etiam probabili modo coniectare licet, cum ista quaestio theoriam aequilibræ longe transcendat. Quae autem haëtenus de aequilibrio fluidorum sunt tradita omnino sufficere videntur omnibus quaestionibus huc spectantibus euoluendis: neque propterea vltiori explicationi immoror sed potius progredior ad principia motus fluidorum stabilienda, quae multo maiorem curam ac diligentiam requirunt.