CAPVT V.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM AD CENTRA VIRIVM FIXA SOLLICITATORVM.

Problema 13.

109.

Si vis acceleratrix, qua singulae fluidi particulae ad centrum virium vrgentur, sit functioni cuicunque distantiae ab hoc centro proportionalis, definire fluidi statum aequilibrii.

Solutio.

Sit A centrum virium per quod transeat planum illud fixum AXY, ad quod situm singularum fluidi particularum Z referamus per ternas coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ sitque in Z pressio $= p$ et densitas fluidi $= q$. Statuatur nunc puncti Z a centro virium distantia $AZ = v$, vt sit $vv = xx + yy + zz$, et sit V ea functio distantiae v, quae vim acceleratricem in Z secundum ZA exprimit. Haec vis secundum ternas coordinatas resoluta dat vires sequentes: Tab. VII. Fig. 17.

fec. direct. XA vim $= \frac{Vx}{v}$ vt fit $P = -\frac{Vx}{v}$

fec. direct. YX vim $= \frac{Vy}{v}$ vt fit $Q = -\frac{Vy}{v}$

fec. direct. ZY vim $= \frac{Vz}{v}$ vt fit $R = -\frac{Vz}{v}$.

Quocirca ex probl. 3. pro ftatu aequilibrii fluidi hanc habebimus aequationem

$$dp = -\frac{qV}{v}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

quae ob $v\,dv = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ contrahitur in hanc:

$$dp = -qV\,dv.$$

Quod fi iam denfitas q ita fit comparata, vt haec aequatio integrationem admittat, quod non euenit, nifi q fit functio binarum quantitatum p et v, ftatus aequilibrii locum habet, eiusque natura per integralem huius aequationis exprimetur.

Coroll. 1.

Tab. VII. Fig. 18 110. Vt ergo fluidum ad aequilibrium fe componat, denfitas q tantum a diftantia a centro virium $AZ = v$ et a preffione p in loco Z pendere debet; quia autem tum ex aequatione $dp = -qV\,dv$ preffio p per folam diftantiam v determinatur, etiam denfitas per folam diftantiam v determinabitur.

Coroll. 2.

111. Si ergo fluidum fuerit in aequilibrio, tum in aequalibus a centro A diftantiis hoc eft per

totam

totam superficiem sphaerae radio $AZ = v$ circa centrum descriptae vbique eadem pressio p eademque densitas q reperietur, id quod de omnibus superficiebus sphaericis concentricis est intelligendum.

Coroll. 3.

112. Quod si igitur in distantia $AC = b$ pressio euanescit, per totam quoque superficiem sphaericam CEGF euanescat necesse est, haecque superficies fluidi suprema est censenda. Vnde patet fluidum in aequilibrio constitutum necessario figuram sphaericam induere, in cuius centro positum sit centrum virium.

Coroll. 4.

113. Si pressio in C euanescat, erit in loco centro propiore Z, posito interuallo $CZ = b - v = u$, pressio $p = \int qV du$, integrali hoc ita accepto, vt euanescat posito $u = 0$, hoc autem integrale exprimit pondus columnae fluidae ex C in Z protensae, quo ea a vi centripeta ad Z vrgetur: Quare ad centrum A accedendo pressio p continuo augebitur.

Scholion 1.

114. Ratiocinium hoc clarius reddetur, si columnae cylindricae CZ basin tribuamus $= ff$, vt eius volumen ob altitudinem $CZ = u$ sit ffu, et incrementum eius, dum altitudo elemento du auge-

 tur,

tur, $= ff\,du$; massae ergo elementum ob densitatem in $Z = q$ erit $= ffq\,du$, quod in vim acceleratricem V, qua deorsum sollicitatur ductum, dabit ponderis incrementum $= ffqV\,du$; ex quo totius columnae CZ pondus erit $= ff\int qV\,du$, quod si ponatur $= P$, pressio in Z erit $p = \frac{P}{ff}$; vnde perspicuum est pressionem in Z ponderi columnae fluidae CZ esse proportionalem, siquidem haec columna a suprema fluidi superficie capiatur. Quoniam igitur haec columna quo magis versus centrum A extenditur eo fit necessario ponderosior, simul intelligitur, quo propius ad centrum A accedatur, eo magis pressionem p augeri debere. Atque hinc etiam vis, quam quoduis corpus solidum fluido immersum ab eius pressionibus sustinet, colligi debet, quippe quae aequalis et contraria est ei vi, qua massa fluida in locum corporis solidi substituta a vi centripeta vrgetur. Hincque ex vi, qua corpus solidum ipsum a vi centripeta sollicitatur, iudicare licebit, vtrum id in fluido sit quieturum, an vero vel sursum vel deorsum pellatur? prouti haec vi illi fuerit vel aequalis; vel ea minor maiorue: quin etiam fieri potest, si ambae vires non per idem corporis punctum transeant, vt ei interea motus quoque gyratorius imprimatur.

Scholion 2.

115. Si ergo densitas in locis a centro A aeque remotis non sit aequalis status aequilibrii locum

cum habere nequit, qualem autem tum motum adipiſcatur fluidum, ſequenti modo colligere licebit. Ponamus in locis b et β denſitatem minorem eſſe quam in locis c et γ, fluidum autem ita eſſe diſpoſitum, vt in b et c preſſiones ſint aequales, ideoque fluidum in tubo bc in aequilibrio verſetur; quo poſito preſſio ad β maior erit preſſione ad γ, quoniam pro illa obtinenda a preſſione in b pondus columnae rarioris βb ſubtrahi debet, pro hac vero denſioris γc. Fluidum ergo per tubum ſuperiorem $\beta\gamma$ a loco, vbi denſitas eſt minor defluet in locum, vbi denſitas eſt maior, qui fluxus ſimul ac inceperit aequilibrium in tubo inferiori bc turbabitur, hicque fluidum denſius ad rarius fluere incipiet. Idem motus prodibit ſi primum fluidum in tubo ſuperiori $\beta\gamma$ in aequilibrio fuiſſe aſſumamus. Quocirca tuto concludimus, ſi in regione βb denſitas minor fuerit quam in regione γc, tum infra fluidum ex c in b ſupra autem contra ex β in γ fluere debere; qui motus tamdiu durabit, quoad aequilibrium locum inuenire queat; ac ſi ob calorem ad $b\beta$ minorem denſitas ibi conſtanter ſit maior quam ad $c\gamma$ hic motus perpetuo durabit, qui caſus omnino conuenit cum illo, quem ſupra euoluimus.

Scholion 3.

116. Pro diuerſa ergo fluidi indole circa aequilibrium ſequentia ſunt notanda. Primo ſi fluidum

dum sit homogeneum densitatem habens inuariabilem, veluti aqua eodem vbique caloris gradu praedita, cum se ad aequilibrium composuerit, in aequalibus a centro virium distantiis pressio vbique est eadem: sin autem fluidum sit heterogeneum, cuius tamen singulae partes nullam densitatis mutationem patiuntur, aequilibrium subsistere nequit, nisi in aequalibus a centro virium distantiis densitas vbique sit eadem, at tum etiam pressio ibidem aequalis sit necesse est. Idem tenendum est, si idem fluidum ob diuersos caloris gradus ratione densitatis discrepet, tum enim ad aequilibrium requiritur, vt in aequalibus a centro virium distantiis vbique idem reperiatur caloris gradus, quod nisi eueniat, aequilibrium locum habere nequit, sed in regionibus inferioribus fluxus dabitur perpetuus a loco frigidiori in calidiorem, in superioribus vero contra a loco calidiore in frigidiorem. Quod si fluidum aëri sit simile et densitatem habeat variabilem non solum a gradu caloris sed etiam a pressione pendentem; tum aequilibrium dari nequit, nisi per singulas superficies sphaericas circa centrum virium descriptas vbique idem caloris gradus regnet; tum vero etiam per totam cuiusque harum superficierum expansionem et densitas et pressio eadem deprehendetur. In his igitur omnibus casibus maxime interest fluidi massam in eiusmodi strata diuidi, quae a centro virium aeque distent, ideoque figuram habeant sphaericam, quae strata aequilibrata vel libellata vocare

care licet; fimili modo quo cafu ante tractato, vbi directiones grauitatis inter fe erant parallelae, haec ftrata plana et horizonti parallela accipi debebant.

Problema 14.

117. Si fingulae fluidi partes ad duo pluraue centra virium fimul follicitentur viribus acceleratricibus, quae vtcunque a diftantiis pendeant, conditiones inueftigare, fub quibus fluidum in aequilibrio confiftere queat.

Solutio.

Sint plura centra virium fixa C, C', C'' vtcunque difpofita fiue in eodem plano fiue fecus; ac fluidi confideretur elementum quodcunque in Z fitum, vbi denfitas fit $= q$, et preffio $= p$. Ponantur huius puncti Z diftantiae a fingulis virium centris: Tab. VIII. Fig. 19.

$$CZ = v;\ C'Z = v';\ C''Z = v''$$

et vires acceleratrices, quibus ad ea feorfim follicitatur, fint V, V', V''. Harum autem virium effectus ratione aequilibrii feorfim definire licet, quoniam fupra vidimus in genere pro aequilibrio effe debere $\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, vbi fingulae vires refolutae in P, Q, R partes peculiares inducunt. Calculo ergo vt ante fubducto pro fingulis viribus ternae coordinatae ex calculo excedent, et ad hanc aequationem peruenietur:

$$\frac{dp}{q} = -V\,dv - V'\,dv' - V''\,dv''$$

 vnde

vnde patet si densitas q fuerit vel constans, vel a sola pressione p pendeat, integrationem succedere, ideoque aequilibrium locum habere, cuius indoles hac aequatione exprimetur:

$$\int \frac{dp}{q} = \text{Const.} - \int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv''$$

vbi notari meretur formulam integralem $\int V\,dv$ repraesentare actionem vis V; quare si omnium virium iunctim consideratarum actio tota statuatur $= W$, vt sit

$$W = \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$$

habebitur $\int \frac{dp}{q} = \text{Const.} - W$. Notio autem huius actionis ita est stabilienda, vt pro quouis spatii puncto, quod virium actioni subiicitur, certum sortiatur valorem longitudine seu altitudine quadam exprimendum, siquidem vires acceleratrices V, V', V'' grauitati homogeneae numeris absolutis indicantur; ita vt actio virium in quouis puncto euadat pressioni homogenea, quippe quam etiam certa altitudine repraesentamus. Actione ergo in calculum introducta erit aequatio differentialis pro statu aequilibrii $dp = -q\,dW$, vnde si densitas q non solum a pressione p sed etiam a loco pendeat, veluti si cuilibet loco certus caloris gradus conueniat, tum aequilibrium locum habere nequit, nisi calor vnice ab actione virium W pendeat, ita vt in omnibus punctis, vbi eadem actio viget, ibi etiam calor sit idem; tum autem in iisdem locis quoque densitas et pressio in aequilibrio fiet eadem.

Coroll.

Coroll. 1.

118. Totum ergo negotium eo redit, vt omnia puncta, vbi actio virium est eadem probe notentur, quae cum pro quauis actionis quantitate W in certam quandam superficiem cadant, talis superficies stratum aequilibratum repraesentabit; ita vt in quolibet strato aequilibrato actio virium vbique sit eadem.

Coroll. 2.

119. Ad aequilibrium igitur id maxime requiritur, vt per singula strata aequilibrata fluidum vbique eandem habeat densitatem, tum vero etiam pressio vbique erit eadem in quolibet scilicet strato aequilibrato. Vnde perspicuum est extremam seu supremam fluidi superficiem secundum huiusmodi stratum aequilibratum se componere debere; ex quo haec strata ad libellam disposita sunt censenda.

Coroll. 3.

120. Si vnicum sit centrum virium, omnia strata aequilibrata figuram habent sphaericam centro virium descriptam, ideoque inter se erunt parallela. Sin autem duo pluraue adsint centra virium, figura singulorum stratorum aequilibratorum admodum sit plerumque irregularis, neque ea amplius inter se erunt parallela, sed potius crassitie inaequabili praedita.

Scholion 1.

121. Duae hic occurrunt notiones maxime notatu dignae, quarum prior eſt notio actionis virium, quae in quoduis punctum agunt, atque alibi oſtendi hanc notionem in principio minimae actionis, maximi eſſe momenti, ex quo ſi forte ea quibusdam geometris vel nimis metaphyſica vel adeo nimis ſterilis fuerit viſa, hic certe ſummam eius vtilitatem agnoſcent. Dum enim vires quaecunque acceleratrices in punctum definitum agunt, ibi certam exerunt actionem quae conuenientiſſime eo modo, quo hic vſus ſum, repraeſentatur, dum ſcilicet quaelibet vis per differentiale directionis ſuae multiplicata integratur, et haec integralia ex ſingulis viribus nata in vnam ſummam colliguntur; vnde conceptus metaphyſicus formari poterit. Ita hic littera W dum exprimit ſummam formularum $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ deſignabit actionem virium V, V′, V″ punctum Z, in quo fluidi elementum concipimus, ſollicitantium. Parum autem refert, quantam conſtantem ob integrationes introducamus, quoniam hanc notionem eo dirigimus, vt omnia loca, in quibus eadem ineſt actio definiamus; interim tamen cum elicuerimus $\int \frac{dp}{q} = \text{Conſt.} - W$ pro quolibet caſu haec conſtans facile determinatur. Hinc igitur nata eſt altera notio ſtratorum aequilibratorum, quorum quoduis eam vniuerſam ſuperficiem complectitur, cuius omnibus punctis eadem

actio

actio conuenit; quantae autem ſit vtilitatis haec notio in aequilibrio fluidorum definiendo, hic iam ſatis copioſe eſt declaratum: at vero etiam in motu fluidorum inueſtigando aeque eſt neceſſaria, vti ex ſequentibus patebit. Determinatio autem horum ſtratorum aequilibratorum pro qualibet virium ſollicitantium hypotheſi, ad problema geometricum reducitur, cuius ſolutio autem plerumque ita ſit difficilis, vt ſtratorum horum figura inde difficulter cognoſci queat. Quoniam vero huiusmodi caſus vix in rerum natura occurrunt, operae haud eſt pretium hunc laborem ſuſcipere; quin potius vires reales, quae in fluida terreſtria agunt, eorumque ſtatum aequilibrii afficiunt, ſum exploraturus.

Scholion 2.

122. Cum ſcilicet omnia, quae nobis circa aequilibrium et motum fluidorum explorare licet, potiſſimum ad fluida ſuper terra conſtituta referri conueniat, aquam nimirum et aërem, perpendendum eſt a cuiusmodi viribus haec fluida praeter grauitatem ſollicitentur. Ac primo quidem occurrit vis centrifuga, qua haec fluida ob motum vertiginis terrae, ab eius axe repelluntur, quam ipſis ab axe diſtantiis proportionalem eſſe conſtat. Etſi enim conſideratio huius vis, ob motum vnde naſcitur neutiquam ad theoriam aequilibrii pertinet; tamen quia eius actio eſt perennis, ſtatim ac fluida ſeſe in certum ſtatum compoſuerint, hic ſtatus vt

 aequi-

aequilibrium ſpectari poteſt, ſiquidem is perfecte cum eo conuenire cenſendus eſt, quem eadem fluida induerent, ſi terra quieſcente ſingula fluidorum elementa praeter grauitatem continuo a viribus illis ab axe repellerentur. Quamobrem quomodo ſtatus aequilibrii in hac hypotheſi comparatus eſſe debeat, plurimum intererit hic inueſtigare, cum concluſiones etiamſi fictioni innitantur, tamen minime a veritate aberrare ſint putandae. Deinde etiam conſtat tam ſolem quam lunam vi ſua attractrice in fluida terrae effectum ſatis notabilem exſerere; qui etiamſi cum continuo motu ſit coniunctus, tamen ita ad ſtatum aequilibrii reuocari poteſt, vt concluſiones vel non multum a veritate abhorreant vel ſaltem ad motus cognitionem deinceps inueſtigandam maxime ſint neceſſariae. Quare etſi ſol et luna quotidie circa terram circumferantur, conueniet quaeſtionem ita conſtitui, vt terra in quiete ſpectata, ſol vel luna perpetuo eidem terrae puncto imminere concipiatur, et ſtatus aequilibrii fluidorum ab hac vi cum grauitate coniuncta productus definiatur. Tum enim his aſtris etiam procedentibus intelligetur, quemnam ſtatum fluida quouis momento induere conentur; tametſi enim nunquam in aequilibrium ſint peruentura, tamen cognitio aequilibrii quod quaſi affectant, maximam habebit vtilitatem.

Pro-

Problema 15.

Tab. VIII. Fig. 20.

123. Si praeter vim centripetam, qua fluidum ad punctum fixum C vrgetur, fingulae particulae Z ab axe fixo A B per centrum C transeunte repellantur viribus distantiae X Z ab axe proportionalibus definire statum aequilibrii, fluidi cuiuscunque.

Solutio.

Sit fluidi elementum quodcunque in Z, cuius densitas sit $= q$ et pressio $= p$; ponatur eius distantia a centro $CZ = v$, cuius functioni V aequalis sit vis acceleratrix, qua id elementum ad C vrgetur, huius ergo vis actio in punctum Z erit $= \int V dv$, partem constituens actionis totius ante littera W indicatae. Altera vero pars oritur ex vi qua elementum Z ab axe A B repelli assumimus, sit ergo perpendiculum ex Z ad axem ductum $Z X = x$, et vis ipsa acceleratrix repellens $= \frac{x}{f}$, quoniam distantiae x proportionalis statuitur. Iam ex praecedentibus perspicuum est, si haec vis contrariam haberet directionem Z X, eam spectari posse vt vim centripetam ad centrum in directione Z X infinite remotum tendentem, sicque eius actio foret $= \int \frac{x\,dx}{f} = \frac{xx}{2f}$: nunc igitur quia vis ab axe repellit, actio statuenda est $= -\frac{xx}{2f}$, ita vt actio tota pro elemento in Z sit $= \int V dv - \frac{xx}{2f}$ loco litterae W substifubftituenda, ex quo pro ftatu aequilibrii haec habetur aequatio

$$\int \frac{dp}{q} = \text{Conft.} - \int V\,dv + \frac{xx}{2f} \text{ feu } dp = q\left(\frac{x\,dx}{f} - V\,dv\right)$$

vnde patet nifi denfitas q fit conftans vel a fola preffione p pendens, eam infuper ipfam actionem W inuoluere debere cum alioquin aequilibrium fubfiftere non poffit. Pro aequilibrio ergo neceffe eft, vt denfitas q fit vel conftans, vel functio folius preffionis p, vel functio duarum quantitatum p et $W = \int V\,dv - \frac{xx}{2f}$. Si ergo calor fit variabilis, eum functionem ipfius W effe oportet, ita vt in omnibus locis, vbi actio W eft eadem, hoc eft in quolibet ftrato aequilibrato, fit idem. Tum vero ibidem et denfitas et preffio eadem fit oportet; ac fuprema fluidi fuperficies fecundum tale ftratum aequilibratum femper erit difpofita. Pro grauitate hic functionem quandam V diftantiae $CZ = v$ introduxi quia eius indoles eft ambigua; fi enim in vifcera terrae defcendimus, haec vis ipfi diftantiae proximae cenfetur proportionalis, fin autem fupra terram per atmofphaeram afcendimus, quadrato diftantiae reciproce proportionalis aeftimatur: ex quo coniicere licet prope fuperficiem quousque vel afcendere vel defcendere datur, grauitatem recte conftantem et vnitati aequalem poni, vnde erit $dp = q\left(\frac{x\,dx}{f} - dv\right)$, pro ftratis autem aequilibratis habebitur haec aequatio $v = \text{Conft.} + \frac{xx}{2f}$, quae ergo exprimit naturam fupremae fuperficiei fluidorum. Ita

fi

si semiaxis totius superficiei sit $CA = k$ vbi $x = 0$, semidiameter aequatoreus vbi $v = x$, ex hac aequatione $x = k + \frac{xx}{2f}$, definitur $x = f - \sqrt{(ff - 2fk)}$ vbi notetur f esse quantitatem maximam.

Coroll. 1.

124. Si ergo quaestio sit de figura oceani terram cingentis; posita densitate $q = 1$, erit pro loco sub oceano quocunque Z pressio $p = k + \frac{xx}{2f} - v$ vnde pro suprema superficie erit $k + \frac{xx}{2f} - v = 0$, vnde vt supra fit semiaxis $CA = k$ et semidiameter aequatoris $= f - \sqrt{(ff - 2fk)} = k + \frac{kk}{2f} + \frac{k^3}{2ff}$ siquidem f multum superet k.

Coroll. 2.

125. Cum reuolutio terrae circa axem absoluatur tempore $23^h, 56', 45'' = 86205''$, pro quo numero si scribamus ν, et altitudinem lapsus vno minuto secundo facti ponamus $= g$ erit quantitas illa $f = \frac{\nu\nu g}{2\pi\pi}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$; ex quo colligitur $f = 3764741 80 g$ et ob semiaxem terrae $k = 19601352$ ped. paris. fit $f = 289, 95\, k$, ex quo semidiameter aequatoris prodit $= k\left(1 + \frac{1}{5799}\right) = \frac{581}{580}k$.

Coroll. 3.

126. Pro pressione autem atmosphaerae, si in terrae superficie sub polo ponatur altitudo barome-

tri $= a$, denſitas aëris $= b$, exiſtente denſitate mercurii $= 1$, ob $q = \frac{bp}{a}$ erit $l\frac{p}{a} = \frac{b}{a}(k - v + \frac{xx}{2f})$, et vbique in ſuperficie maris ob $k + \frac{xx}{2f} - v = 0$ altitudo barometri p erit eadem $= k$. Sub aequatore autem ob ſtrata craſſiora atmoſphaera altius aſſurgit quam ſub polis.

Scholion.

127. Mirum hic videri non debet quod ſemidiameter aequatoris parte tantum $\frac{1}{580}$ ſuperare inventus ſit ſemiaxem terrae, cum tamen experientia iam conſtet exceſſum ad partem $\frac{1}{200}$ aſſurgere. Ratio huius diſcriminis in eo latet, quod hic grauitatem perpetuo ad centrum directam et a ſola diſtantia ab eo pendentem aſſumſimus, ita vt quomodocunque terrae figura mutetur, grauitatis tamen eadem eſſet menſura. Verum nunc ſatis euictum eſt grauitatem ab attractione omnium terrae partium proficiſci, ideoque ſtatim atque terrae figura ſphaerica alteretur, ipſam quoque grauitatem mutationem pati, atque haec grauitatis mutatio in cauſa eſt, quod ob motum vertiginis terrae aberratio a figura ſphaerica multo maior exiſtat. Hugenius quoque qui primus figuram terrae definire ex theoria eſt conatus, dum ad ſolam vim centrifugam reſpexit, grauitate vt inuariabili ſpectata eandem rationem inter axem terrae et diametrum aequatoris ſcilicet fere 580 : 581 elicuit, ex quo calculus hic adhibitus minime ſuſpectus videri debet. Hic autem locus

locus non eſt, vt ex vera attractionis indole calculum propius ad veritatem accommodemus, dum pro aequilibrio tam aquae quam aëris cognoſcendo haec allata abunde ſufficiunt. Neque etiam ei caſui quo in iisdem ſtratis caloris gradus diſcrepat, immoror, cum ſatis conſtet ex ſuperioribus, cuiusmodi motus tum oriri debeat.

Problema 16.

128. Si terrae centro C immineat in E ſiue ſol ſiue luna ſiue aliud corpus attrahens in ratione reciproca duplicata diſtantiarum definire ſtatum aequilibrii fluidorum circa terrae ſuperficiem ſitorum, hoc eſt oceani et atmoſphaerae, dum tam terra quam corpus in E ſine motu ſpectantur. Tab. VIII. Fig. 21.

Solutio.

Poſita diſtantia $CE = b$, ſit maſſa terrae $= C$, corporisque $E = E$ ita vt in diſtantia quacunque $= d$, ſit vis attrahens terrae $= \frac{C}{dd}$ corporis vero $E = \frac{E}{dd}$. Conſideretur iam fluidi elementum quodcunque in Z, cuius denſitas ſit $= q$ et preſſio $= p$; ac vires acceleratrices quibus hoc elementum vrgetur perpendi oportet. Vocentur diſtantiae $CZ = v$ et $EZ = u$, vt poſito angulo $ECZ = \Phi$, ſit $uu = bb - 2bv \cos\Phi + vv$, ac primo punctum Z ſollicitatur ad centrum C vi $= \frac{C}{vv}$, quae abit in vnitatem ſi Z in ſuperficie terrae ipſa capiatur; huius ergo vis actio eſt $= \int \frac{C\,dv}{vv} = \frac{-C}{v}$ partem totius actionis

W constituens. Tum vero idem elementum Z ad E vrgetur vi $= \frac{E}{uu}$, cuius propterea actio est $= \int \frac{E\,du}{uu} = \frac{-E}{u}$. Quoniam vero centrum terrae quod ad E incitatur vi $= \frac{E}{bb}$, in quiete spectatur, tanta vi singula puncta terrae in directionem contrariam vrgeri sunt censenda, hinc ducta ZY ipsi EC parallela, seu ZX ad EC normali, vt sit $ZY = CX = v \operatorname{cos}. \Phi$, punctum Z insuper sollicitari statuendum est secundum ZY vi $= \frac{E}{bb}$, cuius ergo actio est $= \int \frac{E\,d.v \operatorname{cos}. \Phi}{bb} = \frac{E v \operatorname{cos}. \Phi}{bb}$. Quamobrem tota actio in puncto Z erit $W = \frac{-C}{v} - \frac{E}{u} + \frac{E v \operatorname{cos}. \Phi}{bb}$, sicque pro statu aequilibrii habebitur haec aequatio:

$$dp = -q\left(\frac{C\,dv}{vv} + \frac{E\,du}{uu} + \frac{E\,d.v \operatorname{cos}. \Phi}{bb}\right)$$

vbi notandum aequilibrium locum habere non posse nisi densitas q sit vel constans vel a sola pressione p pendeat, vel functio sit binarum quantitatum p et W; tum igitur etiam tam densitas q quam pressio p certis functionibus actionis W aequabuntur. Pro stratis autem aequilibratis aequatio generalis erit $\frac{C}{v} + \frac{E}{u} - \frac{E v \operatorname{cos}. \Phi}{bb} = \text{Const.}$ Cum autem distantia b prae v valde sit magna, erit per approximationem

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{b} + \frac{v \operatorname{cos}. \Phi}{bb} + \frac{vv(3\operatorname{cos}. \Phi^2 - 1)}{2b^3} + \frac{v^3 \operatorname{cos}. \Phi(5\operatorname{cos}. \Phi^2 - 3)}{2b^4} + \frac{v^4(35\operatorname{cos}. \Phi^4 - 30\operatorname{cos}. \Phi^2 + 3)}{8b^5}$$

hincque colligitur actio tota omissis constantibus:

$$W = \frac{-C}{v} - \frac{Evv(3\operatorname{cos}. \Phi^2 - 1)}{2b^3} - \frac{Ev^3 \operatorname{cos}. \Phi(5\operatorname{cos}. \Phi^2 - 3)}{2b^4} - \frac{Ev^4(35\operatorname{cos}. \Phi^4 - 30\operatorname{cos}. \Phi^2 + 3)}{8b^5}$$

existente $dp = -q\,dW$. Notandum autem est si semidiamidiameter terrae vocetur $=k$, fore $\frac{C}{kk}=1$, ideoque $C=kk$, tum vero ſi in E ſit luna haberi proxime $E=\frac{1}{80}C=\frac{kk}{80}$, ſin autem E ſit ſol eius diſtantia media a terra exiſtente $=b$, fore $E=\frac{16\,b^3}{290.\,1465^2.\,k^3}C=\frac{C\,b^3}{38894140\,k^3}$ ideoque $\frac{E}{b^3}=\frac{1}{38894140\,k}$ ob $C=kk$, dum pro luna ſi eius diſtantia a terra media ponatur $=b=60\,k$ eſt $\frac{E}{b^3}=\frac{1}{17280000\,k}$.

Coroll. 1.

129. Siue ergo in E conſideremus ſiue ſolem ſiue lunam, poſito $\frac{E}{b^3}=\frac{1}{nk}$ exiſtente pro luna $n=17280000$, at pro ſole $n=38894140$, erit actio $W=\frac{-kk}{v}-\frac{vv(3\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2-1)}{2nk}-\frac{v^3\,\mathrm{coſ}.\,\Phi(5\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2-3)}{2nbk}$ et pro aequilibrio habebitur haec aequatio $dp=-q\,dW$.

Coroll. 2.

130. Pro mari ergo ſi eius denſitatem ſtatuamus conſtantem $q=1$, vt preſſio p definiatur per altitudinem columnae aqueae, fit $p=\mathrm{Conſt}.+\frac{kk}{v}+\frac{vv(3\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2-1)}{2nk}+\frac{v^3\,\mathrm{coſ}.\,\Phi(5\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2-3)}{2nbk}$; qui poſtremus terminus tuto omitti poteſt, vnde pro ſuperficie maris vbi $p=0$, poſito ſemidiametro $CA=k$ vbi $\Phi=0$, habebitur aequatio $k+\frac{k}{n}+\frac{kk}{nb}=\frac{kk}{v}+\frac{vv(3\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2-1)}{2nk}+\frac{v^3\,\mathrm{coſ}.\,\Phi(5\,\mathrm{coſ}.\,\Phi^2-3)}{2nbk}$, vnde colligitur proxime $v=k-\frac{3\,k\,\mathrm{ſin}.\,\Phi^2}{2n}$, ita vt ſit $CD=k-\frac{3k}{2n}$ exiſtente pro luna $\frac{3k}{2n}=1\frac{2}{3}$ ped. pro ſole vero $\frac{3k}{2n}=\frac{3}{4}$ ped. paris.

Coroll. 3.

131. Pro atmoſphaera autem, ſi in A ſit altitudo barometri $= a$ et denſitas aëris $= b$ ob $q = \frac{bp}{a}$ fit $l\frac{p}{a} = \text{Conſt.} - \frac{bW}{a}$ ſeu $\frac{a}{b} l \frac{p}{a} = \frac{kk}{v} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} - k - \frac{k}{n}$. Vbique ergo in ſuperficie terrae vbi $v = k$ erit $\frac{a}{b} l \frac{p}{a} = \frac{-3k\sin.\Phi^2}{2n}$ ſeu $p = a - \frac{3bk\sin.\Phi^2}{2n}$. Quare in A et B barometrum tenebit maximam altitudinem in D vero minimam, differentia exiſtente $= \frac{1}{6000}$ ped. pro luna, at $= \frac{1}{13333}$ ped. pro ſole, quae ergo ſentiri nequit.

Scholion 1.

132. Sole ergo vel luna in E verſante mare tam in A quam e regione in B intumeſcit, in D vero ſubſidit, neque tamen differentia maior foret quam $1\frac{2}{3}$ ped. pro luna et $\frac{3}{4}$ ped. pro ſole, ſiquidem haec luminaria perpetuo eidem loco A imminerent vnde ſi coniunctim agerent, quod fit tam in coniunctione quam in oppoſitione, maxima maris altitudo ſuperaret minimam fere $2\frac{1}{2}$ ped. Cum autem ambo luminaria continuo ab oriente in occidentem progrediantur, facile intelligitur antequam aquae in A et B confluere queant, luminaria iam vlterius eſſe promota, vnde fit vt in quoque loco aqua tardius intumeſcat, quam ſol vel luna per eius zenith vel nadir tranſierit, idque eo magis, quo maiora impedimenta affluxui obſtent, veluti ſi per freta vel loca minus profunda tranſire cogatur. Tum vero vbi

vbi affluxus iste maiori celeritate contingit, ob impetum conceptum fieri potest, vt aqua ad multo maiorem altitudinem eleuetur, quam pro ratione aequilibrii: cum enim tantum aquae affluat, quantum ad insignem maris tractum tumefaciendum sufficeret, si mare subito littoribus in angustum spatium coarctetur, omnis aqua eo affluens ad insignem altitudinem ascendere debebit, quemadmodum satis nota aestus marini phaenomena declarant.

Scholion 2.

133. Videamus etiam accuratius, quemadmodum atmosphaera a tali actione afficiatur, et quanta in ea ascendendo vbique densitas et pressio sit futura. Terrae igitur superficiem sphaericam assumentes, cuius radius sit $=k$, si in loco quocunque a recta CE angulo $=\Phi$ remoto per altitudinem $=s$ ascendamus vt sit $v=k+s$, ex aequatione supra inventa colligimus fore proxime $p=a-bs-\frac{3bk\,\text{fin.}\,\Phi^2}{2n}$, dum scilicet altitudo barometri in A statuitur $=a$, et aëris densitas $=b$, mercurii densitate existente $=1$. In altitudine ergo ista s densitas aëris erit $q=\frac{bp}{a}=b-\frac{bbs}{a}-\frac{3bbk\,\text{fin.}\,\Phi^2}{2na}$, vnde si in hoc loco columnam aeream consideremus cuius basis sit $=ff$, massa aëris in ea contenta erit $=ff\int q\,ds=ff(bs-\frac{bbss}{2a}-\frac{3bbks\,\text{fin.}\,\Phi^2}{2na})$. Talis ergo columna in A vel B constituta continebit quantitatem aëris $=ff(bs-\frac{bbss}{2a})$, at

at ſimilis columna in D quantitatem aëris $= ff\left(bs - \frac{bbss}{2a} - \frac{3bbks}{2na}\right)$ ex quo illa hanc ſuperat quantitate $= \frac{3bbffks}{2na}$. Quare neceſſe eſt vt inſignis portio aëris in loca A et B affluat, in regionibus D autem atmoſphaera minuatur, vnde in aere ſimilis motus reciprocus atque in mari oriri debebit neque tamen barometrum in A vel B hoc aëris augmentum indicabit, propterea quod ob vim ad E vrgentem grauitas aëris eo congeſti diminuitur. Quanta autem celeritate aër verſus loca A et B affluat, dum luminaria ab E promouentur, hinc minime definire, neque etiam probabili modo coniectare licet, cum iſta quaeſtio theoriam aequilibrii longe tranſcendat. Quae autem hactenus de aequilibrio fluidorum ſunt tradita omnino ſufficere videntur omnibus quaeſtionibus huc ſpectantibus euoluendis: neque propterea vlteriori explicationi immoror ſed potius progredior ad principia motus fluidorum ſtabilienda, quae multo maiorem curam ac diligentiam requirunt.
