Scholion.

72. Hic fluidum a vaſe vndequaque includi et compeſci aſſumimus, niſi forte in ea regione, vbi preſſio eſt nulla, vas ſit apertum et fluidi ſuperficies haec extrema nuda appareat. Sin autem alio loco fuerit foramen, idque ad eruptionem impediendam ope emboli debita vi intruſi obturetur, tum vas praeter illas vires fluidum ſollicitantes, etiam hanc emboli vim ſuſtinebit, quae cum pro emboli baſi maior minorue eſſe poſſit, diuerſiſſimis viribus idem vas ſubiectum eſſe poteſt. Statim vero atque embolus vaſi affigatur ſeu agglutinetur, hae nouae vires ſubito euaneſcunt, ac vas ſolas priores ſuſtinet.

CAPVT IV.
DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM A SOLA GRAVITATE SOLLICITATORVM.

Problema 7.

73.

Si fluidum quodcunque a ſola grauitate deorſum ſollicitetur quae concipiatur vt vis conſtantis magnitudinis, cuius directiones ſint inter ſe parallelae omnia

omnia momenta ad ſtatum aequilibrii requiſita exponere, et principia ante ſtabilita in genere ad hunc caſum accommodare.

Solutio.

Spectetur planum tabulae vt horizontale, cui ergo directio vis ſollicitantis vbique ſit normalis, quantitatem autem huius vis acceleratricis littera g deſignemus, ipſa grauitate naturali exiſtente $= 1$, vt pateat quomodo phaenomena ſe eſſent habitura, ſi grauitas foret vel maior vel minor. Concipiatur nunc fluidi elementum quodcunque in Z, vnde ad planum horizontale demiſſo perpendiculo Z Y, et ab Y ad rectam fixam A P ducta normali Y X, ſint ternae coordinatae locum puncti Z definientes $AX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$. In Z porro ſit gradus caloris $= r$, denſitas fluidi $= q$, et altitudo preſſionem metiens $= p$, ita vt relatio inter p, q, r per fluidi naturam ſit data. Cum nunc elementum in Z deorſum ſecundum Z Y ſollicitetur vi acceleratrice $= g$, pro ſolutione generali capitis praecedentis hic habebimus $P = 0$, $Q = 0$ et $R = -g$, vnde aequatio differentialis conditionem aequilibrii exprimens erit $dp = -gq\,dz$, quae niſi denſitas q ita ſit comparata, vt integratio ſuccedat, aequilibrium omnino locum habere nequit. Dato autem aequilibrio reliqua problemata in cap. praec. tractata facilem ſolutionem admittunt: Si enim corpus ſolidum B C D E fluido ſit ſubmerſum, id ſurſum vrgebitur Tab. VI. Fig. 9. Tab. VI. Fig. 7.

 tanta

tanta vi, quanta fluidi massa eius locum occupans et cum reliquo fluido in aequilibrio consistens a grauitate g deorsum pelleretur, quae ergo vis huius massae fluidae ponderi aequabitur et per eius centrum inertiae erit directa. In ipso ergo corpore BCDE notetur hoc punctum G quod massae fluidae in eius locum substitutae foret centrum inertiae, toto huius massae pondere existente $= G$, et hoc corpus fluido submersum sursum pelletur vi $= G$, cuius directio per punctum G transibit. Simili modo res se habebit si tantum portio corporis CDE fluido immergatur, pro quo casu, quae modo de toto corpore sunt dicta, hic tantum de parte submersa sunt intelligenda.

Tab. VI. Fig. 8.

Si denique fluidum fuerit vasi inclusum, totum vas inde eandem vim sustinet, ac si fluidum in solidum concresceret, pondere scilicet totius massae fluidae deorsum premetur, cuius directio transibit per centrum inertiae totius massae fluidae in vase contentae.

Coroll. 1.

74. Duo igitur casus hic sollicite sunt distinguendi, prout variabilitas densitatis q aequilibrium admittat vel minus. Si enim aequilibrium excludatur, fluidum perpetuo motu agitabitur, neque ea quae de statu aequilibrii sunt tradita, vllo modo locum habere possunt.

Coroll.

Coroll. 2.

75. Cum autem ex fluidi natura relatio detur inter pressionem p densitatem q et calorem r, densitas q vt functio ipsarum p et r spectari poterit; nisi ergo calor r qui a loco pendere censendus est, a sola altitudine $YZ = z$ pendeat, aequilibrium plane locum inuenire non poterit.

Coroll. 3.

76. Hinc sequitur aequilibrium tum solum existere posse, cum gradus caloris in eadem altitudine per totam fluidi massam fuerit idem. Sin autem in paribus altitudinibus calor fuerit diuersus, fluidum nullo modo se ad aequilibrium componere poterit.

Scholion 1.

77. Fluidum hic in genere sum contemplatus, ita vt hae conclusiones tam ad fluida aquae similia, quam quae veluti aër compressionem et rarefactionem admittunt, accommodari queant. Quare quo natura aequilibrii accuratius perspiciatur, vtrumque fluidorum genus seorsim euoluemus; in priori quidem discrimen probe est notandum, prouti fluidum per totam massam fuerit homogeneum nec ne? cuius quidem casus, quo fluidum vbique eadem gaudet densitate, totam hydrostaticam vulgarem complectitur. Sin autem sit heterogeneum, siue id fiat permixtione diuersorum fluidorum, siue idem

idem fluidum in diuersis locis diuerso caloris gradu fuerit praeditum, hic imprimis quaestio euoluenda occurret, quando aequilibrium sit possibile et sub quibus conditionibus. Altera autem huius capitis pars circa fluida compressionis capacia versabitur, vbi etiam plures casus tam pro permixtione, plurium huiusmodi fluidorum diuersorum quam pro variatione caloris expediri conueniet.

Scholion 2.

78. Vbique autem cum status aequilibrii fuerit definitus, etiam inuestigabimus, quomodo corpora solida ipsis immersa se sint habitura, vbi imprimis notandum est, nisi fluidum sit homogeneum seu vbique eandem habeat densitatem, regulas vulgares de vi, quam corpora submersa sustinent, non amplius esse veritati consentaneas. Quodsi enim densitas fluidi fuerit variabilis pro loci diuersitate, tum etiam locus, vbi corpus solidum fluido immergitur, considerari debet: siquidem pro eo loco, quem corpus solidum in fluido occupat, etiamsi fluidum inde iam sit expulsum, tamen diligenter perpendi oportet, quantam densitatem fluidum, mente saltem in locum solidi substitutum, in singulis punctis esset habiturum, id quod ex conditione aequilibrii est definiendum. Non solum enim tum pondus huius massae fluidae quaeri debet, sed etiam eius centrum inertiae, cuius locus potissimum a variatione densitatis

tatis pendebit. Nisi enim hoc punctum exacte fuerit cognitum, media directio vis, qua solidum a fluido vrgetur, assignari non potest.

APPLICATIO
ad fluida omnis compressionis expertia.

Problema 8.

79. Si fluidum fuerit homogeneum, eiusque densitas q vbique eadem seu constans, statum aequilibrii assignare, et quantas vires tam vas continens quam corpora immersa sustineant, definire.

Solutio.

Cum densitas vbique sit eadem ponatur $q = b$ et solutio superior praebet $dp = -gbdz$, vnde integrando elicimus $p = gb(h-z)$, existente h constante per integrationem ingressa. In eleuatione igitur super plano horizontali, a quo altitudinem z sumsimus, facta ea $z = h$ pressies euanescit, ibique ergo existit extrema fluidi superficies quae propterea etiam est horizontalis. Sit ergo F E G haec suprema superficies ad libellam composita, et C Y D planum horizontale pro basi assumtum, vt illius eleuatio sit $EY = h$ atque in altitudine quacunque minore $YZ = z$, pressio erit $p = gb(h-z) = gb.EZ$. In eadem ergo altitudine YZ pressio vbique est eadem, Tab. VI. Fig. 10.

 et

et profunditati EZ infra ſupremam ſuperficiem FG proportionalis, praeterea vero ſequitur rationem grauitatis g et denſitatem fluidi b. Quodſi nunc hic perinde atque in preſſionis euolutione grauitatem g vnitate indicemus et pro materia vniformi, ex qua preſſio definitur, hoc ipſum fluidum ſubſtituamus vtpote etiam homogeneum, fiet altitudo preſſionem metiens $p=b-z=EZ$, ita vt iam in loco quouis Z preſſio p aequetur ipſi profunditati EZ infra ſupremam ſuperficiem; et corpus quoduis huic fluido immerſum ſurſum vrgebitur vi, quae ponderi aequalis voluminis fluidi eſt aequalis, quod cum ſit homogeneum, eius media directio per corporis centrum magnitudinis tranſibit. Vas autem totum fluidi quod continet pondus ſuſtinebit.

Coroll. 1.

Tab. VI. Fig. 11. 80. Quamcunque igitur vas tale fluidum continens habuerit figuram, ſuprema fluidi ſuperficies Ff, Ee, Gg in idem planum horizontale cadit, in qua preſſio vbique eſt nulla. Infra autem hanc ſuperficiem preſſio vbique profunditati erit aequalis, ſiquidem hoc ipſum fluidum loco materiae illius homogeneae grauis, ex qua preſſio definitur, in vſum vocetur.

Coroll. 2.

81. Circa latera ergo huius vaſis in T preſſio aequatur altitudini TV, ita vt ſpatiolum ad T norma-

normaliter prematur a vi aequali ponderi columnae ex eodem fluido formatae, cuius altitudo est T V et basis ipsum illud spatiolum. Similique modo ad x pressio altitudini x V aequabitur.

Coroll. 3.

82. Quod ad corpus solidum quodcunque immersum B C D attinet quoniam tam densitas quam grauitas fluidi vbique est eadem, perinde est in quonam loco intra fluidum id sit collocatum, semper enim sursum pelletur vi aequali ponderi paris voluminis B C D fluidi, cuius media directio per eius centrum magnitudinis transit.

Scholion.

83. Haec sunt principia vniuersae hydrostaticae, ex quibus omnia, quae in hac disciplina tradi solent, facillime deducuntur, quae cum satis superque iam ab Auctoribus sint exposita, iis plenius euoluendis hic non immoror. Ad maiora potius pergo, quae vulgo minus accurate tractari solent, quando scilicet fluidum ex partibus heterogeneis est compositum, quorsum referendus quoque est casus, quo idem fluidum diuersis caloris gradibus est praeditum, quoniam tum etiam eius densitas est diuersa: vbi imprimis animaduerti oportet his casibus fieri posse, vt aequilibrium nullum prorsus locum inueniat, ideoque fluidum continuo motu agitari

necesse sit. Cuius motus determinatio etiamsi huc non pertineat, tamen quodammodo eius rationem perspicere licebit, vnde plurima phaenomena naturae satis feliciter explicari poterunt.

Problema 9.

84. *Si fluidum nullam compressionem patiens fuerit heterogeneum, seu ex diuersis materiis fluidis mixtum, definire rationem permixtionis vt aequilibrium subsistere possit, simulque aequilibrii phaenomena.*

Solutio.

Tab. VI. Fig. 9. Denotante littera g vim acceleratricem grauitatis, sit q densitas fluidi in puncto Z, cuius locus per ternas coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ determinatur. Si igitur altitudo p ibidem pressionem exhibeat, pro aequilibrio hanc habemus aequationem $dp = -gq\,dz$, quae nisi integrationem admiserit, aequilibrium oriri nequit. Necesse ergo est vt densitas q a sola variabili z pendeat, quia alioquin integratio excluditur; si enim forte obiiciatur, hoc fieri posse, dummodo quantitas q fuerit functio binarum variabilium p et z, euidens est, quia tum altitudo p functioni ipsius z aequalis inveniretur, etiam q per certam functionem ipsius z expressum iri. Quare ad aequilibrium necessario requiritur vt densitas q a sola variabili z pendeat; quae conditio eo redit vt in aequalibus altitudini-

bus

bus z, seu in qualibet sectione horizontali eadem vbique densitas reperiatur. Diuersa ergo fluida planis horizontalibus a se inuicem separata esse oportet, ita vt si F G sit superficies suprema, vbi pressio euanescit, per eam vbique fluidum eiusdem densitatis expandatur, quod infra iterum plano horizontali H I terminetur: vbi si aliud fluidum incipiat, id quoque vsque ad planum quoddam horizontale inferius extendatur, sicque porro si plura fluida diuersa sequantur. Quodsi in tali fluido corpus solidum B C D E sit immersum, eius loco fluidum, quod cum reliquo foret in aequilibrio consideretur, eiusque tam pondus quam centum inertiae O notetur, quo facto hoc pondus dabit vim, qua corpus B C D E a pressionibus fluidi sursum pelletur, cuius directio per punctum O transire est concipienda. Denique si casu figurae densitas supremi strati F I sit $= l$, sequentis H L $= m$, et infimi KN $= n$, pressio in loco Z erit $= g\,(GI.\,l + IL.\,m + LZ.\,n)$. Tab. VII. Fig. 12.

Coroll. 1.

85. Plura ergo diuersae densitatis fluida in aequilibrio consistere nequeunt, nisi secundum strata horizontalia inter se fuerint disposita. Ac si initio alium situm habuerint, vel ad istum se component, vel se intime miscendo fluidum homogeneum constituent, vel nunquam ad aequilibrium peruenient.

Coroll. 2.

86. Cum idem fluidum pro diuerſo caloris gradu variam denſitatem recipiat, perſpicuum eſt, etiam fluidum alias homogeneum ſe ad aequilibrium componere non poſſe, niſi per quamlibet ſectionem horizontalem calor vbique fuerit idem.

Scholion 1.

87. Vt plura fluida heterogenea in aequilibrio conſiſtant, ſufficiat ea ſecundum ſtrata horizontalia inter ſe eſſe diſpoſita, vt per quamlibet ſectionem horizontalem per totam fluidi maſſam factam denſitas vbique ſit eadem, neque ad hoc abſolute requiritur, vt ſpecifice grauiſſimum locum infimum, leuiſſimum vero ſupremum occupet. Ita aequilibrium daretur etſi ſupremum ſtratum F I argentum viuum, medium H L aquam et infimum K N oleum contineret; verum hoc aequilibrium minime eſſet ſtabile; quoniam leuiſſima facta concuſſione, ſtatim ac grauioris fluidi particula in inferius leuius cederet, aequilibrium ita perturbaretur, vt grauiſſimum fundum eſſet petiturum, leuiſſimum vero in ſupremum ſtatum ſe recepturum, quandoquidem haec tria fluida ab intima permixtione, qua fluidum homogeneum oriretur abhorrent Quamobrem vt aequilibrium perenne obtineatur, variorum fluidorum ſtrata ita diſponi debent, vt deorſum deſcendendo continuo grauiora ſeu denſiora occur-

currant. At si fluida etsi densitate differentia, facile permisceri patiantur, aequilibrium vix obtineri potest, nisi ea ita confundantur, vt fluidum homogeneum mentiantur. Vtcunque ergo fluida densitate differant, tamen per agitationem ita se tandem disponent, quemadmodum status aequilibrii postulat.

Scholion 2.

88. Fieri autem potest, vt fluidum adeo homogeneum nunquam in aequilibrium perueniat, quando scilicet causa externa adest, qua fluido in vna vasis parte continuo maior caloris gradus imprimitur, veluti si vasis F N aquam continentis lateri G N ignis sit appositus, quo aqua in regione E N contenta multo calidior conseruatur, et vas in alteram partem F M satis protensum sit, vt idem caloris gradus eousque propagari nequeat, ac circa F M aqua perpetuo sit multo frigidior. Cum igitur in parte igni vicina E N aquae densitas sit minor, in opposita vero F L maior, aequilibrium nullo modo locum inuenire potest, cuiusmodi autem motus in eo sit futurus, ex sequenti ratiocinio coniici poterit: Concipiamus diaphragma verticale E L aquam calidiorem a frigidiori separans, atque vt in eius ima parte Z pressio vtrinque existat aequalis, necesse est aquae calidioris altitudinem E Z superare altitudinem frigidioris *e* Z. Hoc ergo modo impedietur ne particula in foraminulo Z *z* ad motum incitetur, at in locis altioribus versus *e* Tab. VIII. Fig. 13.

sumtis

ſumtis preſſio aquae calidae ſine dubio ſuperabit preſſionem frigidae, ex quo ſi totum diaphragma foraminibus pertuſum concipiatur, per ſuperiora aqua calida effluet in regionem frigidae. Qui fluxus ſimul ac inceperit ob auctam altitudinem aquae frigidae eius preſſio circa fundum in Z augebitur contraria vero calidae minuetur, ſicque aqua frigida hic in locum calidae pelletur ac ſimul prior cauſa aquam calidam in regione ſuperiori verſus F vrgens denuo vigebit. Qui vterque fluxus cum perpetuo continuari debet, etiam penitus ſublato diaphragmate EL, euidens eſt hoc caſu quo aqua in regione EN iugiter maiori calore praedita eſt quam in regione oppoſita FL eiusmodi motum perennem in aqua ineſſe debere, vt ſuperne circa GF fluxus fiat ab G ad F aquae calidae in locum frigidae, inferne autem contra ab M ad N aquae frigidae in locum calidae; niſi forte amplitudo vaſis NM ita ſit parva, vt tandem aquae per totam extenſionem idem caloris gradus induci queat.

Scholion 3.

89. Haec concluſio ex theoria deducta, quod fluidum nunquam in ſtatum aequilibrii peruenire poſſit, niſi in aequalibus altitudinibus vbique idem reperiatur caloris gradus, maximi eſt momenti, ac ratio etiam huius phaenomeni nunc perſpicue cognoſcitur quae in eo eſt ſita, quod ſi fluidum ita ſit diſpoſitum, vt circa fundum aequilibrium detur, id

id prope supremam superficiem prorsus excludatur. Ex quo intelligitur, quo profundius sit huiusmodi fluidum, quo in maius spatium id extendatur, et quo maius fuerit discrimen in gradu caloris, eo fortiorem esse debere istum fluxum internum, quo circa superficiem aqua calida in locum frigidae, circa fundum autem contra aqua frigida in locum calidae continuo fertur. Si ergo in mari eiusmodi locus detur; vel lacus quidam ita sit comparatus, vt in altero termino aqua perpetuo sit magis calida quam in termino opposito, hoc phaenomenum imprimis cerni debebit, vt in superficie aqua continuo a loco calidiori in frigidiorem defluat, circa fundum autem fluxus contrarius obseruetur. His perpensis satis verisimile videtur, oceani fluxum intra tropicos ab oriente in occidentem ab hac causa potissimum oriri, quandoquidem a sole mare in locis orientalioribus multo magis calefit, quam in occidentalioribus, qui effectus insuper a continuo solis progressu ab oriente in occidentem haud mediocriter augetur.

APPLICATIO
ad fluida compressionis et rarefactionis capacia.

Problema 10.

90. *Si fluidum aëri simile a grauitate animatum vbique eodem caloris gradu sit praeditum, statum aequilibrii definire et pressionem in singulis locis.*

 Solu-

Solutio. *

Tab. VI. Fig. 9. Assumto quodam plano horizontali AXY supra quod altitudines huius fluidi mensurentur, sit in Z eius particula quaecunque, eiusque altitudo super isto plano $YZ = z$. Densitas porro ibi sit $= q$, et altitudo pressionem metiens $= p$; et quoniam gradus caloris vbique idem statuitur, densitas q a sola pressione p pendebit eiusque certa erit functio ex natura fluidi definienda. Grauitatis nunc vi acceleratrice posita $= g$, pro qua in mensura pressionis vnitate vtimur, status aequilibrii hac aequatione differentiali $dp = -gq\,dz$ definitur, quae cum q sit functio ipsius p semper integrationem admittit, et integrata praebet $\int \frac{dp}{q} = g(b-z)$, vnde primo intelligimus aequilibrium semper locum habere, et cum in eum statum peruenerit, pressionem in singulis locis assignare poterimus. Patet autem pressionem p per solam altitudinem z determinari, ita vt vbique ad aequales altitudines eadem futura sit pressio p. Cum igitur euolutio huius formulae pendeat a ratione, qua densitas q per pressionem p determinatur, aliquot hypotheses percurramus.

I. Sit primo $p = \frac{aq}{b}$, ita vt densitati b conueniat pressio a, et generatim pressio densitati sit proportionalis. Quare ob $q = \frac{bp}{a}$ habebimus $\frac{a}{b} lp = g(b-z)$, ac si sumamus in plano horizontali AXY densita-

tem

tem esse $= b$, et pressionem $= a$, fiet $\frac{a}{b} la = gb$, ideoque $\frac{a}{b} lp = \frac{a}{b} la - gz$ seu $l\frac{a}{p} = \frac{gb}{a} z$.

II. Loco alterius hypothesis supra ex aëris maxima et minima densitate stabilitae quia ad integrationem minus est idonea, sequente vtamur ad phaenomena egregie accommodata. Posita densitate minima $= m$, maxima vero $= n$ statuamus $q = \frac{mk + np}{k + p}$, vbi k denotet pressionem valde magnam, quam experimentis vix attingere liceat, verumtamen talem, vt pro pressionibus mediocribus, mk prae np quasi euanescat, quod cum densitas minima m prae maxima n vix pars $\frac{1}{10000000}$ aestimari queat, facile efficitur, si verbi gratia pressione atmosphaerae in plano horizontali A X Y posita $= a$ sumatur $k = 100\, a$ vel etiam $k = 1000\, a$; hoc autem modo si pressio mediocris non vehementer ab a abhorreat, in illius formulae numeratore pars mk prae np, in denominatore vero pars p prae k negligi poterit vt prodeat $q = \frac{np}{k}$, seu densitas pressioni proportionalis, vt aëris indoles postulat. Hinc ergo nostra aequatio differentialis erit $\frac{k+p}{mk+pn} dp = -g\,dz$, vnde si in ipso plano horizontali A X Y fuerit pressio $= a$, integratio praebet

$$\frac{a-p}{n} + \frac{(n-m)k}{nn} l \frac{mk+na}{mk+np} = g\,z.$$

Quodsi densitatem in eodem plano horizontali vocemus $= b$ ob $b = \frac{mk+na}{k+a}$ erit $k = \frac{(n-b)a}{b-m}$ ideoque in genere $q = \frac{m(n-b)a + n(b-m)p}{(n-b)a + (b-m)p} = m + \frac{(n-m)(b-m)p}{(n-b)a + (b-m)p}$,

 ex

ex quo aequatio noſtra ſtatum aequilibrii definiens erit:

$$\frac{a-p}{n}+\frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)}\,l\frac{(n-m)ba}{m(n-b)a+n(b-n)p}=gz.$$

Cum igitur ſurſum aſcendendo preſſio p continuo diminuatur pro eius quauis diminutione infra a altitudo z hinc facile definitur, ac preſſio p plane euaneſcet in altitudine, quae eſt $=\frac{a}{ng}+\frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)g}\,l\frac{(n-m)b}{m(n-b)}$, vbi denſitas fiet $=m$, et atmoſphaera penitus deſinere eſt cenſenda. Quantam preſſionem ſolida huiusmodi fluido immerſa ſuſtineant, ex praecedentibus ſatis intelligitur.

Coroll. 1.

91. Quia preſſio atmoſphaerae per altitudines mercuriales menſurari ſolet, denſitas mercurii vnitate eſt denotanda; vnde parum a ſcopo aberrabimus, ſi maximam aëris denſitatem n etiam vnitate deſignemus: tum autem denotante iam a altitudinem barometri in ſuperficie terrae erit propemodum denſitas ibi $b=\frac{1}{10000}$, minima vero denſitas m minimum adhuc millies minor eſt aeſtimanda.

Coroll. 2.

92. Quodſi porro grauitatem g vnitate deſignemus aequatio inuenta erit:

$$z=a-p+\frac{9999(1-m)a}{1-10000m}\,l\frac{(1-m)a}{9999.m.a+(1-10000.m)p}$$

vnde

vnde tota atmoſphaerae altitudo facta preſſione $p = o$ reperitur $= a + \frac{9999(1-m)a}{1-10000\,m}\, l\frac{1-m}{9999\,m}$. Quare poſito $m = 10^{-\mu}$ quia exponens μ eſt valde magnus, erit proxime:

$$z = a - p + 10000\, l\frac{10^{\mu-4}\, a}{a + 10^{\mu-4}\, p},$$

hincque altitudo atmoſphaerae $= a + 10000\, a (\mu - 4)\, l\, 10$.

Coroll. 3.

93. Cum igitur ſit $a = 2\frac{1}{2}$ ped. et $l\,10 = 2.30258$ ſi altitudo atmoſphaerae ſtatuatur $= \lambda a$, vt λ ſit numerus maximus, fiet hinc $\lambda - 1 = 23026(\mu - 4)$. Quare ſi modo ſit $\mu = 6$ ſeu $m = \frac{1}{1000000}$, fit $\lambda = 2.23026$, et 23026 ped. pro milliari germanico aeſtimatis altitudo atmoſphaerae ad quinque milliaria aſſurget, ſumtoque $\mu = 8$ ad decem milliaria.

Coroll. 4.

94. Si ergo altitudo atmoſphaerae aeſtimetur 5 milliarium erit aeris denſitas minima $m = \frac{1}{1000000}$, qui valor cum tantum centies ſit minor denſitate, quam ſentimus, experimenta pneumatica vtique ſuadent vt ſtatuamus $m = \frac{1}{100000000}$, et altitudinem atmoſphaerae 10 milliarium vnde pro quauis altitudine z erit $z = a - p + 10000\, a\, l\frac{10000\, a}{a + 10000\, p}$ ibique erit

 den-

densitas aeris $q = \frac{1}{1500000000} + \frac{p}{10000\,a + p}$ densitate mercurii existente $= 1$.

Scholion.

95. Hae duae hypotheses etsi natura prorsus diuersae tamen inter se vix discrepant, nisi pressio sit vel nulla vel adeo infinita. Quando autem pressio nulla statuitur, discrimen cernitur maximum, cum prior hypothesis, atmosphaerae altitudinem infinitam tribuat altera vero finitam, antequam autem ascendendo ad hanc peruenitur, ratio qua et densitas q et pressio p decrescit, ex vtraque hypothesi eadem fere prodit. Ac si liceret infra planum A X Y in viscera terrae descendere, vix vlla differentia perciperetur, nisi ad maximam profunditatem fuerit deuentum, quanquam in descensu differentia sensibilior fieri debet quam in ascensu, ex his formulis autem tabula condi solet ostendens quantum in ascensu ad quamuis altitudinem pressio cum densitate minuatur, in descensu vero augeatur, quae autem ab experientia haud mediocriter abludere deprehenditur. Cuius rei causa non in eo sita est putanda, quod hic non veram relationem inter densitatem et pressionem simus secuti, quomodocunque enim ea fuerit comparata, semper pro iis altitudinibus ad quas nobis ascendere licet, eadem lex prodire debet, propterea quod in his variationibus densitas satis exacte pressioni est proportionalis. Vera autem huius aberrationis causa sine dubio in eo est quae-

quaerenda, quod hic toti atmoſphaerae vbique eundem calorem tribuimus, cum tamen experientia longe aliud declaret, qua nouimus aſcendendo gradum caloris continuo diminui, ita vt ad certam altitudinem ſub aequatore aeque ac ſub polis vbique terrarum frigus intenſiſſimum fere in eodem gradu reperiatur, atque tota caloris et frigoris variatio et viciſſitudo tantum circa terrae ſuperficiem obſeruetur, cum etiam in terrae interiora penetrando continuo magis ad aequalitatem componatur. Lex vero, qua calor furſum aſcendendo diminuitur, nullam certam regulam ſequitur, ſed pro variatione climatum et tempeſtatum maxime eſt irregularis; vnde in ſequente problemate rem ita generaliter ſum complexurus, vt ad omnes caſus accommodari queat; pro ſcala nempe caloris in quauis altitudine lineam curuam quamcunque adhibebo; vbi autem hoc perpetuo eſt tenendum, niſi vbique in aequalibus altitudinibus idem ſit caloris gradus, aequilibrium plane dari non poſſe.

Problema II.

96. Data ſcala caloris pro qualibet altitudine ſuper plano horizontali, definire ſtatum aequilibrii atmoſphaerae et preſſionem cum denſitate aeris in quauis altitudine.

Solutio.

A plano horizontali CAD aſcendendo per altitudinem verticalem $AZ = z$ ſit ibi gradus calo- Tab. VII. Fig. 14.

ris

ris $= r$ repraesentatus applicata Z R curuae cognitae C R r, quae est scala caloris; tum vero in eadem altitudine sit densitas aëris $= q$ et pressio $= p$, quae simul denotet altitudinem mercurii in barometro ad Z constituto, ita vt hic densitas mercurii vnitate exprimatur, ideoque q sit fractio valde exigua. In ipso autem plano horizontali C A D sit gradus caloris A C $= c$, densitas aeris $= b$ et pressio seu altitudo barometri in A $= a$. Iam pro altitudinibus ad quas ascendere licet, ante vidimus pressionem densitati proportionalem statui posse, siquidem calor fuerit idem; calore ergo variabili assumto si eius mensura adhuc incerta ita determinetur, vt manente densitate eadem calor pressioni proportionalis aestimetur, habebimus $p = \frac{aqr}{bc}$, vnde fit $q = \frac{bcp}{ar}$. Quare cum status aequilibrii hac aequatione differentiali contineatur $\frac{dp}{q} = -dz$, posita vi grauitatis acceleratrice $g = 1$ erit $\frac{dp}{p} = \frac{-bcdz}{ar}$, quae aequatio cum r sit functio ipsius z vtique integrationem admittit, simulque indicat hoc casu aequilibrium locum habere, quo cum atmosphaera peruenerit fiet integrando $lp = \text{Const.} - \frac{bc}{a}\int\frac{dz}{r}$. Ex scala caloris C R r construatur alia curua D S s, vt sit vbique $ZS = \frac{c}{r} = \frac{AC}{ZR}$, ideoque A D $= 1$, et per quadraturam huius curuae habebimus $l\frac{a}{p} = \frac{b}{a}.ADZS$, vnde definita pressione p pro altitudine A Z $= z$, erit ibidem densitas $q = \frac{bcp}{ar} = \frac{bcp}{a.ZR}$. Vel si loco caloris r ipsam aream curuae D S s in calculum introducere

ducere velimus ponendo $\int \frac{c\,dz}{r} = s$, ita vt s ſit certa functio ipſius z euaneſcens poſito $z = 0$, erit $l\frac{a}{p} = \frac{b\,s}{a}$ ſeu $p = a\,e^{\frac{-b\,s}{a}}$, et ob $r = \frac{c\,d\,z}{d\,s}$, habebitur $q = \frac{b\,p\,ds}{a\,d\,z} = \frac{b\,d\,s}{d\,z}\,e^{\frac{-b\,s}{a}}$ vbi notetur, ſi calor per totam altitudinem eſſet idem fore $s = z$, ſin autem calor decreſcat functionem s in maiore ratione creſcere debere quam z, ita tamen vt poſito $z = 0$ fiat $s = 0$ et $\frac{d\,s}{d\,z} = 1$, vnde ſtatui conueniet $s = z + \alpha z^{\lambda}$ exiſtente $\lambda > 1$. Quo facto erit $r = \frac{c}{\alpha\lambda z^{\lambda-1} + 1}$, et $q = \frac{b\,p}{a}(1 + \alpha\lambda z^{\lambda-1})$.

Coroll. 1.

97. Quodſi ſcala caloris $C R r$ ſit linea recta verticalem $A Z$ in altitudine $z = b$ ſecans, ita vt ibi calor prorſus euaneſcat; pro hoc caſu habebimus $r = c(1 - \frac{z}{b})$ tum vero $p = a(1 - \frac{z}{b})^{\frac{b\,b}{a}}$ et $q = b(1 - \frac{z}{b})^{\frac{b\,b}{a} - 1}$. Hinc poſito $z = b$ preſſio ibi euaneſcet, denſitas vero q vel euaneſcet ſi $b > \frac{a}{b}$ vel erit $= b$ ſi $b = \frac{a}{b}$ vel adeo infinita euadet ſi $b < \frac{a}{b}$.

Coroll. 2.

98. Si ſcala caloris ſit logarithmica furſum cum verticali $A Z z$ conuergens, ſeu $z = b\,l\frac{c}{r}$ erit

 $r = c\,e$

$r = c e^{\frac{-z}{b}}$, hinc $q = \frac{bp}{a} e^{\frac{z}{b}}$, ideoque $\frac{dp}{p} = -\frac{b}{a} e^{\frac{z}{b}} dz$, vnde integrando colligitur $l\frac{a}{p} = \frac{bb}{a}(e^{\frac{z}{b}} - 1)$, ex qua aequatione pro quauis eleuatione z pressio p assignari poterit. Hoc casu in altitudine infinita tam pressio p quam densitas q cum calore r euanescet.

Coroll. 3.

99. Si calor etiam descendendo decrescat formula $r = \frac{c}{1 + \alpha\lambda z^{\lambda-1}}$ ad hunc casum accommodari potest sumendo pro λ numerum imparem vnitate semper maiorem. Veluti posito $\lambda = 3$, habebimus $r = \frac{c}{1 + 3\alpha zz}$, $s = z + \alpha z^3$, hinc $p = a e^{\frac{-bz}{a}} (1 + \alpha zz)$ atque $q = \frac{bp}{a}(1 + 3\alpha zz)$. Hic si ponatur $z = \infty$, cum calore etiam pressio cum densitate euanescet.

Scholion 1.

100. Relatio inter pressionem, densitatem et calorem, etiam generalior in calculum introduci potest, ei qua supra sumus vsi conformis, vbi densitatem minimam $= m$; maximam vero $= n$ statuimus. Sit enim hic ob calorem variabilem $\frac{qr}{c} = \frac{mk + np}{k + p}$ seu $q = \frac{mk + np}{k + p} \cdot \frac{c}{r}$ et sumto $g = 1$ aequatio differentialis $\frac{k + p}{mk + np} dp = \frac{-c\,dz}{r}$ integrata dat $\frac{a - p}{n} + \frac{(n-m)k}{nn} l \frac{mk + na}{mk + np} = \int \frac{c\,dz}{r}$. Pro casu ergo praesenti, vbi densitas in superficie terrae $= b$ fit $k = \frac{(n-b)a}{b-m}$ et

et $q = \left(m + \frac{(n-m)(b-m)p}{(n-b)a + (b-m)p}\right)\frac{c}{r}$ hincque $\frac{a-p}{n} + \frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)}$ $l\,\frac{(n-m)ba}{m(n-b)a + n(b-m)p} = \int\frac{c\,dz}{r}$.

Cum autem ob denſitatem mercurii $= 1$ ſtatui queat $n = 1$, ac tam b prae n, quam m prae b ſit fractio minima, ſatis exacte habebimus:

$$q = \left(m + \frac{bp}{a - b(a-p)}\right)\frac{c}{r} \text{ et}$$

$$a - p + \frac{a}{b}\,l\,\frac{ba}{bp + m(a-p)} = \int\frac{c\,dz}{r}.$$

Hic ſi vtamur hypotheſi $r = \frac{c}{1 + 3\alpha zz}$ obtinebimus

$$q = \left(m + \frac{bp}{a - b(a-p)}\right)(1 + 3\alpha zz) \text{ et}$$

$$a - p + \frac{a}{b}\,l\,\frac{ba}{bp + m(a-p)} = z + \alpha z^3$$

vnde poſito $p = 0$ tota atmoſphaerae altitudo, quae ſit $= h$ ita definitur, vt ſit $a + \frac{a}{b}\,l\frac{b}{m} = h + \alpha h^3$; ex quo patet α ita exiguam fractionem eſſe debere vt etiamſi h ſit altitudo aliquot milliarium, tamen αhh non fiat numerus praemagnus. Ponamus ergo $\alpha hh = \lambda$, eritque $r = \frac{chh}{hh + 3\lambda zz}$; $q = \left(m + \frac{bp}{a - b(a-p)}\right)$ $\frac{hh + 3\lambda zz}{hh}$ et $a - p + \frac{a}{b}\,l\,\frac{ba}{bp + m(a-p)} = \frac{z(hh + \lambda zz)}{hh}$ vnde facto $p = 0$, ob $z = h$ erit $a + \frac{a}{b}\,l\frac{b}{m} = (1 + \lambda)h$, et $q = m(1 + 3\lambda)$. Verum quia ob maximas atmoſphaerae mutationes hic nihil eſt certum vel conſtans, vberior euolutio huius hypotheſis prorſus foret inutilis.

 Scho-

Scholion 2.

101. Quascunque autem conclusiones hinc inferre licet, probe semper est tenendum, eas locum non habere, nisi atmosphaera fuerit in aequilibrio; statim enim atque ea ventis agitatur, omnia quae hinc de pressione et altitudine barometri tradi solent, maxime perturbantur, neque amplius quicquam certi statui potest, cuius circumstantiae imprimis ratio est habenda, quando altitudo barometrica in diuersis altitudinibus et profunditatibus obseruatur etiamsi enim status caloris perfecte esset cognitus, nihil tamen inde colligere liceret, nisi atmosphaera prorsus esset tranquilla. Vt autem atmosphaera in aequilibrio consistere possit, omnino necesse est, vt in aequalibus altitudinibus, seu per quoduis eius stratum horizontale densitas vbique sit eadem, vnde etiam eadem pressio consequitur. Vidimus autem hoc neutiquam euenire posse, nisi simul in aequalibus altitudinibus vbique idem caloris gradus vigeat, ex quo sequitur, quoties in vna terrae regione ad eandem altitudinem aër fuerit calidior vel frigidior quam in alia, aequilibrium nullo modo subsistere posse, sed ventum necessario exoriri debere non ante cessaturum quam per ingentem saltem terrae tractum in quouis strato horizontali aër sese ad eundem caloris gradum composuerit. Quod cum rarissime eueniat, mirum non est, atmosphaeram vix vnquam prorsus esse tranquillam, ideoque dubium est nullum, quin haec praecipua ventorum causa sit statuenda.

tuenda. Cuiusmodi autem motus in aëre oriri debeat, quando in aequalibus altitudinibus gradu caloris discrepat, tametsi haec quaestio ad theoriam motus fluidorum pertinet; tamen simili modo, quo supra vsi sumus, quodammodo colligere licet, quantum quidem ad praesens institutum sufficit; atque hinc plurimorum phaenomenorum caussam intelligere licebit.

Problema 12.

102. Si calor atmosphaerae in vna regione multum discrepet ab eo, quem in alia regione ad eandem altitudinem habet, ita vt aequilibrium locum habere nequeat, motum aëris hinc oriundum praeterpropter saltem definire.

Solutio.

Sit aër regioni AB imminens maiore calore praeditus, quam qui regioni CD imminet; concipiamus primo prope terram tubum horizontalem bc a regione calida in frigidam porrigi, et atmosphaeram in eo statu esse, vt pressio in b aequalis sit pressioni in c, ideoque aër in tubo bc quiescat. Ob calorem ergo circa b maiorem quam circa c, densitas ad b minor erit quam ad c, hincque par aëris volumen ibi minus habebit pondus quam hic. Nunc similem tubum horizontalem $\beta\gamma$ altius situm consideremus, ac manifestum est pressionem ad β minorem esse pressione ad b pondere columnae Tab. VII. Fig. 15.

 aëris

aëris a b ad β protensae; similique modo pressionem ad γ deficere a pressione ad c pondere columnae aëris a c ad γ protensae, at haec columna ob densitatem maiorem per $c\gamma$ grauior est illa; vnde cum pressiones ad b et c sint aequales, pressio ad γ vtpote maiore parte minuta minor erit pressione ad β, quippe quae minore parte mulctatur. Ex quo necesse est aërem in superiori tubo a regione calidiore in frigidiorem propelli; qui fluxus cum aëris molem in regione frigida augeat, in calida vero minuat, etiam circa tubum inferiorem bc aequilibrium mox turbabitur, et aër hic a regione frigida in calidam propelletur. Idem eueniet si aërem primum circa tubum superiorem $\beta\gamma$ in aequilibrio fuisse statuamus, ita vt tum pressiones ad β et γ fuerint aequales, tum enim a β ad b descendendo pressio minus accipiet augmentum quam a γ ad c descendendo, quia ibi aëris densitas minor est quam hic, ex quo in c pressio erit maior quam in b et aër frigidior per hunc tubum in locum calidiorem propelletur, quo fluxu etiam aequilibrium superne ita turbabitur, vt iam aër calidior per tubum $\beta\gamma$ in locum frigidiorem deferatur. Hinc ergo remotis his tubis tuto pronunciare possumus, si aër regioni AB imminens calidior sit aëre regioni CD imminente, tum infra ventum oriri a regione frigida in calidam, supra autem contra ventum a regione calida in frigidam spirantem. Tum vero de vi huius venti duplicis, in genere sequentia notari

tari licet. Primo quo maius fuerit discrimen inter calorem et frigus, eo hunc ventum fortiorem esse debere. Secundo quo maior fuerit altitudo $b\,\mathfrak{E}$, per quod hoc discrimen porrigitur, ob maiorem aequilibrii perturbationem etiam ventum accelerari oportere. Tertio vero quo minus regio frigida a calida distet, eo magis etiam ventum augeri, quia tum minor aëris massa ab iisdem viribus per tubos αb et $\mathfrak{E}\gamma$ est propellenda; dum contra si hae regiones maxime distent, fluxus aëris admodum lenis oriri debet ob insignem massam mouendam.

Coroll. 1.

103. Si ergo duo conclauia vicina per ianuam inuicem communicent et alterum fuerit calefactum, alterum frigidum, tum infra aër ex conclaui frigido in calidum intrabit, supra autem habebit fluxum contrarium, vti experientia ostendit.

Coroll. 2.

104. In eodem porro conclaui, quod ope fornacis est calefactum in regione inferiori aër ad fornacem accedit, in superiori vero inde recedit, sicque prope fornacem continuo sursum ascendet, et motu suo exiles machinas agitare valet, prouti experientia declarat.

Coroll. 3.

105. Si in foco camini ignis accendatur, statim atque aër ei imminens calorem concipit, in regione

gione inferiori aër vndequaque ad ignem propellitur, et cum fumo per caminum egreditur, dum eius locum aër exterior per rimas conclauis intrans supplere valeat.

Coroll. 4.

106. Haec etiam causa est, quod in Africae littoribus quae interdiu ab imminente sole maxime vruntur, continuus ventus ab oceano afflet in regionibus scilicet humilioribus, dum is sine dubio in sublimi cursum tenet contrarium.

Scholion 1.

107. Hinc igitur perspicuum est quantum iste fluxus aëris ad ignem super focis et in fornacibus suscitandum conferat, dum continuo motu ad ignem appellens per caminum ascendit, ac phaenomena notissima producit. Id tantum dubium hic exoritur, quod exempla eiusmodi caminorum non desint, quibus iste aëris fluxus minime conspiciatur ac potius fumus a fluxu contrario in conclaue depelli videatur. Quanquam autem vitium plerumque in eo est positum, quod vel ob angustiam vel alia impedimenta camini liber aëris ascensus coërceatur, tamen haec sola causa huiusmodi aduersis phaenomenis explicandis haud sufficere videtur. Ad fumum autem sese aëri admiscentem hic quoque est attendendum, quo sine dubio densitas aëris haud mediocriter

criter augetur; cum enim affluxus aëris supra explicatus inde oriatur, quod a calore densitas aëris diminuitur, si eueniat, vt ob fumum tantundem augeatur, ille effectus prorsus cessare debet, quin etiam ob maiorem densitatem cursus contrarius per caminum descendens fumum in conclaue expellere poterit. Quare ne hoc incommodum vsu veniat, imprimis curandum est, vt fumus liberrimum exitum per caminum inueniat, hocque modo eius quantitas prope ignem ita diminuatur, vt aër inde vix maiorem densitatem adipiscatur.

Scholion 2.

108. Num autem ventus ille perennis orientalis, qui inter tropicos obseruatur, ab eadem causa oriatur? haud satis liquet, quoniam in locis magis ad occidentem sitis, ad quae sol cursum suum dirigit, calor atmosphaerae maior certe non est, quam in iis quibus sol imminet. Et cum post meridiem demum calor sentiatur maximus, hinc potius sequi videtur, a regionibus occidentalioribus aerem affluere debere. Quo autem hic aliquid certius statuere queamus repraesentet circulus A B D C globum terraqueum, in quo sit A locus, cui iam vel sol immineat, vel vbi calor sit maximus, ita vt tam in regione occidentaliori B quam orientaliori C gradus caloris sit multo minor. Hoc posito certo affirmare licet, si sol perpetuo eidem loco A immineret, Tab. VII. Fig. 16.

neret, vel calor maximus ibi perennis foret, tum vndequaque perinde aërem prope ſuperficiem ad locum A delatum iri, ita vt in B ventus occidentalis, in C vero orientalis ſentiri deberet; dum in regione ſublimi aër vbique curſum contrarium eſſet habiturus. Nunc autem ponamus maximum calorem ab A continuo occidentem verſus proferri, ac manifeſtum eſt inde affluxum ab oriente intendi, ab occidente autem debilitari debere. Si enim haec promotio caloris ſatis eſſet rapida, facile intelligitur motum ab occidente prorſus extinctum iri, atque vniuerſam atmoſphaeram fere vniformiter ab oriente in occidentem conuerti debere; quae cum quaſi ſponte ſe ad talem motum componat impetu ſemel accepto, vix opus eſſe videtur, vt in ſuprema regione motus exiſtat contrarius, quo iactura retro facta compenſetur; vel ſi adſit talis motus, multo erit debilior. Neque ergo dubito cauſam euri perennis in zona torrida principio hic ſtabilito et cum motu telluris diurno coniuncto attribuere.

CAPVT