

CAPVT III.

DE

AEQVILIBRIO FLVIDORVM

A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE SOLLICITA-
TORVM IN GENERE.

Problema 3.

52. Si fluidum quodcunque a viribus quibus-
cunque sollicitetur inuestigare condiciones sub quibus
fluidum in aequilibrio consistere possit.

Solutio.

Tab. VI. Consideretur fluidi particula elementaris quae-
Fig. 6. cunque sub figura parallelepipedii $k l m n x x y y z z$ ad
ternas coordinatas inter se normales relata, quae
sint $A S = x$ $S K = y$ et $K k = z$, ita ut paralle-
lepipedum ex harum differentialibus sit formatum,
ideoque eius volumen $= dx dy dz$. Statuatur den-
sitas fluidi in puncto $k = q$ posita semper densitate
eius materiae, qua ad pressiones definiendas utimur
 $= r$, eritque massa totius elementi $= q dx dy dz$,
quae simul si id esset gravitati expositum, eius pondus
exprimeret. Iam a quibuscunque viribus hoc ele-
mentum sollicitetur, eas semper secundum directio-
nes ternarum coordinatarum seu axes principales
 $A P$, $A Q$, et $A R$, inter se normales resolvere li-
cet.

cet, sintque hae tres vires in puncto k sollicitantes secundum $kL = P$, secundum $km = Q$ et secundum $kn = R$ quae vires acceleratrices intelligantur, posita gravitatis vi acceleratrice $= B$ hinc nostrum elementum pro ratione massae $q dx dy dz$ ab his viribus acceleratricibus animatum sollicitabitur his tribus viribus motricibus sec. AP vi $= P q dx dy dz$ sec. AQ vi $= Q q dx dy dz$ sec. AR vi $= R q dx dy dz$ ubi litterae P, Q, R numeros denotant ut functiones terrarum variarum x, y, z spectandos. Cum autem fluidum in aequilibrio consistat, necesse est ut harum virium actio a pressionibus idem elementum vndequeque urgentibus coarceatur. Hunc in finem sit altitudo pressio in puncto k exhibens $= p$ quae cum pariter ut functio terrarum variarum x, y et z considerari debeat, statuamus eius differentiale

$$dp = L dx + M dy + N dz$$

ita ut sit more signandi recepto

$$L = \left(\frac{dp}{dx}\right) \quad M = \left(\frac{dp}{dy}\right) \quad N = \left(\frac{dp}{dz}\right)$$

Pendantur iam pressiones, quas singulae hedrae nostri parallelepipedii ab his viribus sustinent, ac primo quidem patet pressiones hedrae $ln \lambda$ superare pressiones hedrae $km \mu$ in singulis punctis particula $= L dx$ quare cum utriusque harum hedrarum area sit $= dy dz$ elementum nostrum secundum directionem PA urgebitur vi $= L dx dy dz$. Deinde pressiones hedrae $mn \mu$ excedunt pressiones

X x 3

hedrae

hedrae k/λ in singulis punctis particula $= M dy$ unde elementum secundum directionem QA virgetur vi $M dx dy dz$: ac tandem simili modo reperitur elementum nostrum secundum directionem RA virgetur vi $= N dx dy dz$. Cum nunc hae vires illas, quae ex viribus sollicitantibus nascuntur, continere in aequilibrio debeant, quia directiones sunt contrariae necesse est fit

$$L = Pq, \quad M = Qq \quad \text{et} \quad N = Rq.$$

Quare ex viribus sollicitantibus pressio fluidi in puncto k ita definitur, ut fit

$$dp = q(Pdx + Qdy + Rdz).$$

Denique vero si gradus caloris in puncto k littera r designetur, quem ut cognitum spectare licet, dabitur quoque relatio inter litteras p, q, r ex natura fluidi, ex qua densitas q per p et r determinetur; si ergo haec conditio cum illa aequatione differentiali coniungatur, ex viribus sollicitantibus, quae in singulis punctis agunt vna cum gradu caloris r colligi poterit pressio fluidi p in singulis locis, indeque porro densitas q , ut fluidum in aequilibrio consistere possit.

C O R O L L. I.

53. Si vires sollicitantes evanescant ut fit $P=0, Q=0, R=0$, fit $dp=0$ ideoque p quantitas constans, tum scilicet pressio ubique per totam fluidi

fluidi massam eadem esse debet, vt aequilibrium locum habere possit, prorsus vti in capite praecedente ostendimus.

Coroll. 2.

54. Ob vires autem sollicitantes pressio per fluidi massam fit variabilis, eiusque variabilitas cum ab his viribus tum a gradu caloris pendet, siquidem densitas q per pressionem p et calorem r determinatur. Euenire ergo poterit, vt pressio alicubi euanescat, vel adeo negatiua euadat.

Coroll. 3.

55. Aequilibrium ergo locum habere nequit, nisi aequatio $dp = q(Pdx + Qdy + Rdz)$ sit possibilis: quod cum non nisi sub certis conditionibus eueniat ob plures variabiles, euidentis est infinitos dari casus, quibus aequilibrium ne locum quidem habere possit, quos ergo casus in posterum sollicite perscrutari conueniet.

Scholion I.

56. Fluidum hic nusquam terminari assumpsi, quoniam conditio vasis id continentis nihil ad determinationem pressionis confert, sed tantum impedit, ne fluidum diffuat. Pro lubitu ergo fluidum limitibus circumscribere licet, idque considerare, quasi vasi esset inclusum, tum vero ex statu aequilibrii hic definito patebit, quantam pressionem late-

ra vasis in singulis punctis a fluido sustineant, unde vicissim colligere licebit. quanta firmitate vas praeditum esse oporteat, ut his pressionibus resistere, fluidumque coercere valeat. Imprimis autem hic inaequalitas pressionum spectari debet, ut ubi latera vasis maximas vires sustineant, innotescat. Sin autem eueniat, ut alicubi pressio prorsus euanescat, ibi plane non opus est fluidum coerceri, sed sponte in statu suo perseverabit, etiamsi ibi vas omnino apertum relinquatur. In hac regione fluidum dicitur ad libellam compositum, eiusque superficies ut extrema spectatur, quia etiamsi quicumque fluidi ultra eam existeret, id ob defectum pressionis non cohaereret, et quasi plane abesset, considerari posset. Extrema ergo cuiusque massae fluidae superficies est ea, ubi pressio euanescit, et status aequilibrii sponte conseruatur, ut ibi vase non opus sit ad diffluum coercendum. Sin autem vasi alicubi apertura tribuatur, hinc patet quanta vi ope emboli haec apertura obstrui debeat ne ibi fluidum effluat, quae vis utique euanescit, si apertura in extremam fluidi superficiem cadat. Quando fluidum a sola grauitate animatur, haec extrema superficies simul est suprema, ad libellam composita, quod idem euenit si vires sollicitantes ad punctum fixum conuergant, quo casu superficies suprema fit sphaerica.

Scholion 2.

57. Quomodo autem pressio seu altitudo eam metiens p in statu aequilibrum fieri possit negatiua, difficulter perspicitur. Cum enim pressio positiua particulas fluidi ita afficiat, vt se mutuo penetrare conentur, isteque effectus tam ob impenetrabilitatem quam ob difficultatem eas in angustius spatium comprimendi irritus reddatur, negatiua pressio in hoc consistet, vt fluidi particulae quasi se mutuo repellant: quoniam autem nisi fluidum vasi sit inclusum, nihil impedit, quo minus partes a se inuicem recedant, continuitas mox dissoluetur, neque ergo aliter aequilibrium adesse potest, nisi quatenus singulae particulae ab omni nexu solutae seorsim quiescant. Hic autem casus non amplius ad mechanicam fluidorum est referendus, quia singulae guttulae tanquam corpuscula solida tractari debent. In vase autem fluidum continente pressio negatiua multo minus locum habere potest, cum fieri nequeat, vt latera a fluido introrsum premantur. Ex quo statuendum est, quoties calculus pressionem declarat negatiuam, toties fluidi continuitatem tolli, idque quasi in guttas separatas dispergi, vt eius consideratio non amplius ad praesens institutum sit referenda: cuius quippe principia huic inniuntur fundamento, vt fluidi partes continuae maneant. Hoc autem non solum de aequilibrio sed etiam de motu fluidorum est tenendum, nusquam pressionem fieri posse

posse negatiuam, quin simul continuitas tollatur. Ac si in motu aquae per tubos, ab auctoribus interdum pressio negatiua fieri asseritur, id ita est accipiendum, eam tantum fieri minorem pressione atmosphaerae, ideoque adhuc esse positiuam. Statim autem ac reuera fit negatiua, dispersio in guttas obseruatur, vti videmus in fontibus salientibus, qui postquam summitem attigerunt, in guttas disperguntur: ibi igitur pressio negatiua fieri est censenda.

Scholion 3.

58. Circa ipsas porro vires sollicitantes, vnde ternas vires P, Q et R elicuimus, omnino tenendum est, eas neququam ad libitum fingi licere, sed ita assumi debere, vti in mundo reuera existunt. Primo ergo occurrit grauitas, quae nisi fluidum, quod consideratur, maximum volumen occupet, quantitatem et directionem constantem habere est censenda, si autem fluidum maiorem habeat expansionem grauitatis directiones conuergere sunt statuendae, veluti quando totum mare vel atmosphaera aërea examini subiicitur. Deinde etiam attractio vniuersalis, qua non solum corpora coelestia, sed etiam eorum partes se mutuo attrahere deprehenduntur plurimas vires reales suppeditat, quarum actioni fluida subiiciuntur. Hae autem vires omnes hac insigni gaudent proprietate, vt ex iis formula differentialis $Pdx + Qdy + Rdz$ semper euadat verum

rum differentiale cuiuspiam functionis variabilium x y et z ideoque fit $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx}) : (\frac{dP}{dz}) = (\frac{dR}{dx})$ et $(\frac{dQ}{dz}) = (\frac{dR}{dy})$ atque huius functionis indoles eo magis est notatu digna, quod ea in principio minimae actionis ab Ill. Praefide de *Maupertuis* inuento ipsam quantitatem actionis exprimat. Quod si ergo haec quantitas actionis designetur littera V , ut fit $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ habebimus $dp = qdV$, et quia q per p et r determinatur, intelligitur, nisi quantitas r ita sit comparata, ut haec aequatio integrationem admittat, aequilibrium plane locum habere non posse, sin autem vires P , Q , R pro lubitu fingere liceret, ut formula $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem respueret, tum fluidum aequilibrum plane non foret capax, nisi forte in calore eiusmodi variatio statui posset, qua aequatio inuenta fieret integrabilis. Cum igitur huiusmodi casibus aequilibrium nullum plane locum habere posset, fluida perpetuo motu agitari necesse foret.

Problema 4.

59. Si fluidum a viribus quibuscunque sollicitatum in aequilibrio consistat, eique corpus quodcunque solidum sit immersum, inuestigare vires, quas hoc corpus a pressione fluidi ambientis sustinet.

Solutio.

(Sit $BCDE$ id corpus solidum, quod ei flui- Tab. VI.
do, cuius statum aequilibrum modo definiuimus, sit Fig. 7.

Yy 2

immer-

immersum, ab eoque circumquaque eas sustineat pressiones, quas ibidem inuenimus. Ad eas autem euoluendas primum obseruo hoc corpus easdem pati pressiones, quas sustineret: ea fluidi massa, cuius nunc locum corpus obtinet: quo circa in locum corporis mente substituamus aequale fluidi volumen, quod cum futurum esset in aequilibrio, necesse est, ut pressiones quas a fluido ambiente sustinet, aequales sint et contrariae actioni virium P, Q, R idem volumen sollicitantium. Probe autem hic est animaduertendum isti volumini loco corporis substituto in singulis punctis eam densitatem tribui oportere, quam aequilibrii conditio ante definita postulat, ex quo forte necesse est ut etiam caloris ratio habeatur. Definito autem effectu, quem hae vires P, Q, R in isto volumine producant, ei aequalis erit et contrarius is effectus quem corpus solidum propositum a pressibus fluidi ambientis sustinet.

Coroll. 1.

60. Cognitio ergo sola virium, quibus fluidum sollicitatur, non sufficit ad vim, quam corpus immersum sustentat, definiendam, sed insuper nosse oportet pro eo loco quem corpus occupat, quamnam ibi fluidum habiturum esset densitatem in singulis punctis.

Coroll. 2.

61. Hinc in eodem fluido, prout corpus in alio atque alio loco constituitur pressiones id maxime

me discrepantes sustinere potest, hocque non solum ob variationem virium sollicitantium, sed etiam ob variationem densitatis quae fluido in diuersis locis inest: etiam si in loco, quem iam corpus occupat, nullum adsit fluidum, ac fortasse densitas huic loco conueniens nusquam alibi in fluido reperiatur.

Coroll. 3.

62. Deinde etiam plurimum interest, cuiusmodi situm idem corpus in fluido teneat: fieri enim potest ut idem corpus si tantillum inuertatur longe alias pressiones sustineat. Quamobrem non solum volumen corporis sed etiam figura cum situ plurimum conferunt ad vim, quam sustinet definiendam: nisi forte fluidum sit homogeneum et graue, quo casu haec vis a solo volumine pendet.

Scholion 1.

63. Hoc ergo casu facillimo excepto, determinatio virium, quas corpus submersum sustinet, calculos saepe vehementer molestos postulat, quoniam omnia elementa fluidi intra volumen corporis concipiendi considerare oportet. Ita si parallelepipedum Tab. VI elementare $klmn\kappa\lambda\mu\nu$ in loco corporis fuerit, Fig. 6. cuius massa est $= q dx dy dz$, singulae hae formulae differentiales $P q dx dy dz$, $Q q dx dy dz$ et $R q dx dy dz$ ope triplicis integrationis per totum corporis volumen extendi debent, cuius figura si fuerit irregula-

gularis, haec inuestigatio valde fit difficilis, neque in genere pro viribus quibuscunque P, Q, R quicquam definire licet. Totum ergo hoc negotium in sequentes tractationes est reseruandum, vbi praecipuos virium sollicitantium casus, qui quidem in mundo locum habent, accuratius euoluemus: hic vero sufficiat, methodos quicque praestandi in genere saltem indicasse.

Scholion 2.

64. Alia autem statim se offert methodus directa hoc idem problema soluendi, dum pressiones, quas corpus in singulis superficiei suae elementis sustinet, perpenduntur, eaeque secundum ternas directiones fixas resolutae per totam superficiem in vnam summam colliguntur. Verum hic antea aequationem differentialem pro pressione p inuentam integrari necesse est, vnde nisi pressio satis simpliciter exprimat haec methodus in calculos inextricabiles praecipitaret. Id tantum hic commodi eueniret, quod dum pressio p per integrationem definienda constantem quandam arbitrariam recipit per circumstantias fluidi datas definiendam, haec quantitas constans in hoc negotio prorsus non in computum ingrediatur, propterea quod pressiones circumquaque aequales se mutuo destruant. Eatenus ergo tantum corpus submersum a pressionibus fluidi ad motum impellitur, quatenus hae pressiones non sunt aequales: inuenta autem hac vi, qua corpus impellitur,

litur, si ea cum reliquis viribus, quae in idem corpus agunt, comparatur, facile iudicare licebit, vtrum corpus sit in quiete permanurum, an vero motum impetraturum. Quoniam vero hic tantum de aequilibrio agitur, nisi corpus in fluido sponte quiescat, id vi quacunque in hoc statu conseruari concipiendum est, nisi forte quaestio de primo tantum momento, quo corpus fluido est immissum, instituat.

Problema 5.

65. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque sollicitatum fuerit in aequilibrio, eique corpus solidum ex parte tantum immergatur, definire vires, quas eius pars submersa a pressionibus fluidi sustinet.

Solutio.

Ante omnia notandum est hunc casum locum habere non posse, nisi in fluido, in quo datur extrema superficies, in qua pressio prorsus evanescat, quae ergo non indiget vase continente quo coerceatur. Sit ergo $FCEG$ haec superficies fluidi extrema ideoque aperta, dum in reliquis locis vase quocunque continetur, hincque corpus solidum $BCDE$ fluido ita sit immersum vt portio CDE sub fluido versetur, portio vero CBE promineat; quo posito quaestio est quantas vires hoc corpus a pressionibus fluidi sustineat. Primum autem obseruo, si portio

Tab. VI
Fig. 8.

portio prominens CBE secundum ipsam fluidi superficiem extremam CE resecetur, partem reliquam etiam nunc easdem pressiones esse sustentaturam, nunc autem haec pars CDE quasi tota esset fluido immersa considerari poterit, dummodo strato fluidi infinite tenui tegi concipiatur, qua conditione ne opus quidem est, quia per totam superficiem FC EG pressio est nulla. Hinc per Problema praecedens vis, quam haec pars submersa sustinet aequalis et contraria est illi vi, quam vera fluidi portio hunc locum occupans et cum reliquo fluido aequilibrium seruans a viribus sollicitantibus P , Q et R sustineret. Mente ergo spatium CDE fluido repleatur, cuius densitas in singulis punctis, ad aequilibrium requisita per superiora patebit, et virium P , Q et R sollicitatio in hanc massam exquiratur; quae in contrarium versa dabit vim quaesitam, a corporis solidi parte submersa sustentatam.

Coroll. 1.

66. Si haec vis inuenta ab iis, quibus corpus solidum per se sollicitatur perfecte destruat, id sponte in hoc statu perseverabit, et fluido insidet, sin secus eueniat corpus vel maius vel minus immergetur, vel conuertetur, nisi a noua vi aequilibrium confernetur.

Coroll. 2.

67. Inuentio ergo istius vis eodem modo insitui debet, vti in praecedente problemate ostendimus:

mus: praeter volumen scilicet partis submersae eius quoque figuram nosse oportet, tum vero potissimum densitatem quam fluidum hoc volumen occupans et cum reliqua massa in aequilibrio consistens, in singulis punctis esse habiturum. Quae inuestigatio ita est comparata, ut nonnisi in casibus particularibus deinceps tractandis suscipi queat.

Scholion.

68. Imprimis autem notandum est, non semper omnes vires elementares quibus volumen quoddam fluidum a viribus P, Q et R sollicitatur, ad vnicam vim omnibus aequivalentem reuocari posse; sed quandoque eas vires ad duas, interdum etiam ad tres reduci debere, ut paucioribus non idem effectus obtineri queat. Haec autem virium supputatio eodem modo institui debet, quo in corporibus solidis a viribus quibuscunque sollicitatis uti solemus, quandoquidem hae vires, postquam fuerint inuentae, facta inuersione ad corpus solidum sunt applicandae. In massa ergo fluida, in locum partis submersae substituta, primum notetur centrum inertiae, deinde vero etiam per id terni axes inter se normales ducti concipiantur, quo facto primum omnes vires sollicitantes elementares in ipsum centrum inertiae transferantur, earumque vis aequivalens vna quaeratur. Praeterea singularum virium elementarium momenta respectu ternorum axium colligantur, ut pateat quantum virium momentum

corpus circa singulos axes sustineat. Denique eadem illa vis cum his tribus momentis contrario modo corpori solido in locum fluidi restituto applicetur, sicque facillime patebit quemnam effectum in eo sint productura, et quomodo hoc corpus in quiete conferuari oporteat.

Problema 6.

69. Si fluidum quodcumque a viribus quibuscunque sollicitatum sit in aequilibrio et vasi cuicunque inclusum, inuestigare vires, quas totum vas a fluidi pressione in latera exerta sustinet.

Solutio.

Si omnes pressiones inter se essent aequales, vas fluidum continens foret in aequilibrio, neque vlla vi externa opus esset ad id continendum: Eatenus ergo tantum vi opus est ad vas sustentandum, quatenus pressiones in eius latera non ybique sunt aequales. Tum autem sunt inter se inaequales, quando fluidum a viribus, quas hic litteris P, Q, R indicauimus, sollicitatur vnde leui attentione intelligitur, vas omnes eas vires sustentare, quibus singula fluidi elementa a viribus P, Q et R sollicitantur, si enim omnis massa fluida subito in corpus solidum concrederet, easdemque vires sustineret, eae quasi in ipsum vas immediate agerent, considerari possent. Eadem autem veritas per ratiocinium supra adhibitum confirmari potest; concipiantur latera

tera vasis tenuissima, idque fluido quasi infinito immersum spectetur, ita vt fluidum externum cum interno in aequilibrio versetur. Hoc posito evidens est pressiones, quas vas a fluido externo sustinet, praecise aequales et contrarias esse iis viribus, quibus a fluido interno vrgetur, et quas hic inuestigamus. Verum pressiones externae, quoniam totum vas vt solidum corpus fluido immersum spectari potest, aequales sunt et contrariae, viribus quibus fluidum vasi inclusum actu sollicitatur; denuo igitur conuersione facta, et fluido externo penitus remoto, perspicuum est totum vas omnes sustinere vires; quibus fluidum inclusum sollicitatur.

Coroll. 1.

70. Vas igitur totum perinde vrgetur, ac si fluidum vna cum vase corpus solidum constitueret, quod ab iisdem viribus sollicitaretur. Interim tamen in pressione quam latera sustinent ingens erit discrimen, quia in corpore solido pressiones longè aliter propagantur atque in fluido.

Coroll. 2.

71. Vt ergo non solum fluidi aequilibrium, sed etiam ipsum vas cum fluido in quiete conseruetur, necesse est vt vas extrinsecus a viribus idoneis sustentetur; et quantis viribus ad hoc opus sit ex principiis positis determinari oportet.

Scholion.

72. Hic fluidum a vase vndequeque includi et compefci affumimus, nisi forte in ea regione, vbi pressio est nulla, vas sit apertum et fluidi superficies haec extrema nuda appareat. Si autem alio loco fuerit foramen, idque ad eruptionem impediendam ope emboli debita vi intrusi obturetur, tum vas praeter illas vires fluidum sollicitantes, etiam hanc emboli vim sustinebit, quae cum pro emboli basi maior minorue esse possit, diuersissimis viribus idem vas subiectum esse potest. Statim vero atque embolus vasi affigatur seu agglutinetur, hae nouae vires subito euanescent, ac vas solas priores sustinet.

CAPVT IV.

DE

AEQVILIBRIO FLVIDORVM
A SOLA GRAVITATE SOLLICITATORVM.

Problema 7.

73.

Si fluidum quodcunque a sola grauitate deorsum sollicitetur quae concipiatur vt vis constantis magnitudinis, cuius directiones sint inter se parallelae
omnia