CAPVT II.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM REMOTA GRAVITATE ALIISQVE SIMILIBVS VIRIBVS.

Lemma.

31. Si corpus cuiuscunque figurae per totam superficiem vndique normaliter sollicitetur a viribus aequalibus, quatenus in aequalia superficiei elementa agunt, tum omnes hae vires coniunctim se mutuo destruent.

Demonstratio.

Tab. V. Fig. 5. Referatur tota superficies ad ternas coordinatas, inter se normales, quae pro puncto superficiei quocunque p sint $AM = x$, $MP = y$ et $Pp = z$, sumtisque elementis $MN = PQ = dx$ et $PR = QS = dy$, vt in plano pro basi assumto AMP habeatur rectangulum elementare $PQRS = dx\,dy$, cui in superficie corporis emineat elementum $pqrs$, in quod normaliter ducta sit recta pO basi in O occurrens. Hoc igitur elementum $pqrs$ per hypothesin secundum directionem pO sollicitatur a vi areae huius ipsius elementi proportionali quae ergo vis commodissime

diſſime exhibetur pondere columnae cuiusdam materialis normaliter iſti elemento inſiſtentis, et cuius altitudo vbique ſit eadem $= p$. Cum iam recta pO normalis ſit ad ſuperficiem erit elementum $pqrs$ ad areolam $PQRS = dxdy$ vt recta pO ad $Pp = z$, hincque $pqrs = \frac{pO}{z} dx\,dy$ ex quo pondus illius columnae aeſtimandum eſt $= p\frac{pO}{z} dx.dy$ qua vi elementum $pqrs$ in directione pO vrgetur. Nunc igitur hanc vim ſecundum directiones ternarum coordinatarum reſoluamus, ac pro directione pP quidem vis tota multiplicari debet per $\frac{Pp}{pO}$ vnde vis ſecundum directionem pP ſollicitans prodit $= p\,d.x.dy$ vnde cum coordinatas inter ſe permutare liceat, vis qua idem elementum ſecundum directionem AM vrgetur, erit $= p\,dy\,dz$ et ſecundum directionem $MP = p\,dx\,dz$. Cum harum trium virium ſimilis ſit ratio ſufficit vnam conſideraſſe, quae ſit vis $p\,dx\,dy$ qua elementum $pqrs$ in directione pP ſollicitatur: vbi obſeruetur, cum corpus vndique ſit terminatum, rectas pP, qQ, Rr, Ss productas denuo ſuperficiem alicubi traiicere, eiusque elementum abſcindere debere, quod cum pari vi vrgeatur ſecundum eandem directionem Pp ſed contrariam, hae vires ſibi aequales et contrariae ſe mutuo deſtruent. Simili modo pro viribus $p\,dy\,dz$ et $p\,dx\,dz$ quibus elementum $pqrs$ ſecundum directiones AM et MP vrgetur, dabuntur alia ſuperficiei elementa, quae vires his aequales et directe contrarias ſuſtinent: quod cum in omnibus elementis eueniat, perſpicuum eſt omnes omnino vires iunctim conſideratas ſe mutuo perfecte deſtruere, et in aequilibrio continere.

Coroll. 1.

32. Duo hic caſus occurrunt, prout vires iſtae aequales vel extrinſecus ſuperficiem introrſum vrgendo agunt, vel intrinſecus ſuperficiem extrorſum diſtendendo, vtroque autem caſu omnes vires iunctim ſumtae in aequilibrio verſantur.

Coroll. 2.

33. Neque ergo ab huiusmodi viribus corpus ad motum cietur ſiue id ſit ſolidum ſiue fluidum, dummodo iis ſuſtinendis par ſit, ſcilicet ſi vires introrſum vrgeant, corpus in minus volumen coarctare, ſin autem extrorſum pellant, in maius diſtendere conantur. Quare dum corpus huic actioni ſufficienter reſiſtat nullus plane effectus ab huiusmodi viribus producetur.

Coroll. 3.

34. Si igitur corpus per totam ſuperficiem ab huiusmodi viribus aequalibus normaliter vrgeatur, ſiue extrorſum ſiue introrſum, nulla vi externa opus eſt, qua id in ſtatu ſuo contineatur, ſed ſponte in quiete perſeuerabit.

Theo-

Theorema.

35. Dum preſſio qua fluidum extrinſecus vrgetur, per totam eius maſſam aequaliter diffunditur, tam omnes fluidi partes, quam vas in quo continetur, in aequilibrio conſiſtunt.

Demonſtratio.

Quoniam per naturam fluiditatis preſſio fluidum vrgens aequaliter per totam eius maſſam diffunditur, latera vaſis in quo continetur, vbique eiusmodi vires aequales ſuſtinent quales in lemmate praemiſſo ſumus contemplati, ita vt quoduis elementum ſuſtineat vim ipſi proportionalem, quae commodiſſime per altitudinem certae columnae indicatur, quippe cuius pondus eam vim exhibere cenſendum eſt. Quare cum latera vaſis ab his viribus normaliter extrorſum vrgeantur, ea ſe mutuo deſtruent, et vaſi ab illis nulla mutatio inducetur, dummodo diſtenſioni ſufficienter reſiſtat. Deinde cum etiam ſingulae fluidi particulae a paribus viribus quaquauerſus comprimantur, in aequilibrio pariter erunt conſtitutae, dummodo vlteriori compreſſioni reſiſtant, quod euenit ſi ſingulae partes eam habeant denſitatem eumque caloris gradum, cui eadem preſſio conueniat. At ſi fluidum aquae ſit ſimile, ne hac quidem conditione eſt opus, cum in omni ſtatu etiam maximas vires ſuſtinere valeat.

Coroll. 1.

36. Corpus ergo etiam huic fluido immerſum, quia vndique a ſimilibus viribus comprimitur, erit in aequilibrio, neque ad vllum motum ab his preſſionibus concitabitur. Perindeque hic eſt, ſiue hoc corpus fuerit denſius ſiue rarius quam fluidum.

Coroll. 2.

37. Dum fluidum in vaſe contentum ope emboli vrgetur, et preſſio eadem per totum fluidum diffunditur, vires a fluido ipſo exercitae ſe in aequilibrio ſuſtinent: vas autem a vi embolum vrgente perinde ac corpus ſolidum ſollicitatur, et cum fluido incluſo promoueretur, niſi vi contraria ſuſtentaretur.

Scholion 1.

38. Cum de ipſo vaſe, in quo fluidum continetur, quaeſtio eſt, eae vires quas a fluido incluſo patitur, probe ſunt diſtinguendae ab iis viribus, quae extrinſecus ope emboli in fluidum agunt. Ponamus ope emboli pO fluidum in vaſe ABCDEF contentum vrgeri, et iam in aequilibrio verſari, omnes ergo fluidi partes tam inter ſe quam in latera vaſis agent viribus aequalibus, quas vt vidimus certa altitudine $= p$ repraeſentare licet, ac per lemma patet ſingulas fluidi partes vtpote quaquaverſus aequaliter preſſas in aequilibrio contineri, ne-

Tab. V. Fig. 2.

que

que in iis vllum motum inteſtinum generari. Quatenus porro latera vaſis ab iisdem viribus extrorſum pelluntur, quoniam hae vires ſe mutuo deſtruunt, eatenus etiam ipſum vas in aequilibrio ſeruatur. Verum praeter has vires, vas etiam ſuſtinet vim qua embolus vrgetur, idque perinde ac ſi cum fluido vnum corpus ſolidum conſtitueret; ne igitur ab hac vi ad motum concitetur, vi contraria et aequali opus eſt, vt totum vas cum fluido in quiete retineatur. Sin autem embolus vaſi affigatur, et iam vis externa tollatur, fluidum quidem in eodem ſtatu perſeuerabit, ſed vas nullam vim extrinſecus ſuſtinens per ſe in aequilibrio erit conſtitutum.

Scholion 2.

39. Quoniam in hoc capite fluida neque grauitati neque aliis ſimilibus viribus ſubiecta aſſumimus, quae actione ſua corpora quaſi penetrant, ſed tantum vires extrinſecus in fluida agentes contemplamus, veluti embolorum ope, quarum actio in certam tantum ſuperficiei partem exeritur, haec duo virium genera ſollicite a ſe inuicem diſtinguere conuenit, quarum illas grauitati ſimiles vires, internas appellare licet, quoniam ſaltem ſingulis particulis inſitae videntur, etiamſi earum cauſa extrinſecus ſit quaerenda: hae autem vires embolorum ope vrgentes merito externas vocamus. Hoc igitur capite in ſtatum aequilibrii fluidorum inquirimus, quando a nullis viribus internis ſollicitantur; vbi inprimis

notandum est, remotis his viribus internis, idcirco pressiones internas, quae a viribus externis per totam fluidi massam diffunduntur, minime tolli, ideoque cum viribus internis minime confundi oportere. Quam confusionem feliciffime euitabimus, si vti instituimus, istas pressiones in calculo per altitudines exhibemus, dum vires internas veras grauitati similes more in mechanica recepto exprimimus. Quaecunque scilicet pressio in fluido reperiatur, qua omnes partes tam se mutuo vrgent, quam in latera vasis agunt, ea conuenientissime certa quadam altitudine $= p$ indicatur, vbi quidem certa quaedam materia vniformis grauis assumitur ex qua si formetur columna cylindrica illius altitudinis aequalis p, cuius basis sit aequalis ipsi superficiei pressionem sustinenti, tum huius columnae pondus pressionem sit relaturum. Huius materiae, ex qua istas columnas formamus, densitatem vnitate constanter denotabimus, ita vt earum soliditas simul pondus pressionem referens sit exhibitura, dum cuiusque alius materiae pondus ex volumine in densitatem multiplicato aestimatur. Quando enim etiam grauitatem a fluido excludimus, tamen nihil impedit, quo minus in pressione definienda grauitatem in subsidium vocemus.

Scholion 3.

40. Quodsi fluidum etiam a nullis viribus externis vrgetur, ita vt eius partes nullam plane pres-

pressionem in se mutuo exerceant, tum huiusmodi fluidi massa quaecunque, quomodocunque eius partes inter se fuerint dispositae, semper erit in aequilibrio, neque opus est, ad fluidum in quiete continendum, vt id vasi cuipiam sit inclusum. Hoc ergo casu pressio atque adeo altitudo pressionem metiens vbique erit nulla, etiamsi enim aliquod vas fluidum ambiret, eius tamen latera nullam ab eo vim sustentarent, perinde foret, ac si vas plane abesset, hocque valet, siue fluidum fuerit homogeneum siue heterogeneum siue compressionis capax siue secus. Si fluidum instar aquae nullam compressionem patiatur, singulae partes naturalem suam habebunt densitatem, quae scilicet cuique pro ratione caloris conuenit: sin autem fluidum veluti aër compressionis sit capax, tum quia nullae vires comprimentes adsunt, quaelibet pars se ad minimam suam densitatem componet, quae cum etiam a calore pendere possit, simul huius ratio est habenda, ita vt hoc aequilibrii casu in singulis partibus densitas sit minima, seu volumen, in quod se pro gradu caloris expandere possunt, maximum: quare quo hoc fieri possit, vasis fluidum continentis ideam plane remouemus. At si fluidum a viribus externis vrgeri sumamus, id necessario vase inclusum concipi debet, cuius latera eius pressionem sustineant et diffusionem coerceant: hunc ergo casum prout fluidum compressionis vel sit capax vel secus, accuratius euoluamus.

Problema I.

41. Si fluidum nullius compreſſionis capax in vaſe a vi quacunque ope emboli vrgeatur, definire preſſionem, per totam fluidi maſſam diffuſam, ſeu altitudinem, qua haec preſſio repraeſentatur.

Solutio.

Tab. V. Fig. 1. Sit baſis emboli O, qua fluidum normaliter premitur $= ff$ vis autem embolum trudens aequetur ponderi P, quandoquidem omnes vires diſtinctiſſime per pondera exhibentur. Introducetur iam materia quaedam homogenea, cuius denſitas ſit cognita, et vnitate expreſſa, huius quaeratur maſſa, quae grauitati expoſita idem eſſet habitura pondus P huic autem maſſae tribuatur figura columnae cylindricae ſeu prismaticae, cuius baſis ſit $= ff$, atque altitudo ponatur $= p$, ita vt volumen columnae prodeat $= ffp$ ob denſitatem $= 1$ ſimul pro maſſa ideoque et pondere habendum, quod ergo illius ponderis P loco adhibeatur. Quoniam igitur quantacunque fuerit emboli baſis ff, fluidi preſſio ſemper eſt eadem, modo altitudo illa p fuerit eadem, haec ipſa altitudo p conuenientiſſime pro menſura preſſionis aſſumitur? eaque cognita quantitas preſſionis facillime cognoſcitur. Ac primo quidem ſi quaeratur quanta vi latera vaſis vbique premantur, ea in elementa minima diuiſa concipi conuenit, quoniam preſſio in ſingula normaliter agit; ſi enim maior

portio

portio consideraretur a pluribus discrepans, diuersitas directionis hanc determinationem turbaret. Sit igitur in vasis cauitate interna $c\,d$ e'usmodi spatiolum, quod pro plano haberi queat, eiusque areola $= kk$: atque pressio, quam id sustinet, aequabitur ei ponderi, quod esset habitura massa illius materiae homogeneae densitate $= 1$ praeditae, cuius volumen foret $= kkp$; tantaque vi istud spatiolum $c\,d$ secundum directionem mr in id normalem premetur. Hinc ergo omnes vires, quas vasis parietes a fluido sustinent, clarissime agnoscuntur. Pares autem vires etiam omnes fluidi partes $f\,g\,h$ a circumfluo vndiquaque sustinent, neque tamen de statu suo naturali deturbantur quia nullius compressionis sunt capaces, atque vires ipsae vt vidimus se mutuo in aequilibrio tenent. Quin etiam corpus solidum huic fluido immersum easdem vires esset experturum, ac propterea etiam in quiete perseueraturum. Tum vero aequilibrium aeque locum habebit, siue fluidum fuerit homogeneum siue heterogeneum, singulae enim partes suam quaeque conferuabunt densitatem naturalem, quae cuique cum ratione indolis tum caloris est propria.

Coroll. 1.

42. Quodsi ergo in eodem vase diuersa fluida veluti aqua, spiritus vini, et mercurius, vtcunque fuerint permixta, omnes partes non obstante pressione emboli in perfecto erunt aequilibrio, neque

 vlla

vlla adeſt cauſa, quae ſingula in vnum locum congregare nitatur.

Coroll. 2.

43. Talia ergo diuerſa fluida eam mixtionis rationem, quae ipſis ſemel fuerit inducta perpetuo conſeruabunt, neque in lateribus vaſis vllum diſcrimen reperietur, quippe quae ſiue a ſpiritu, ſiue ab aqua, ſiue a mercurio tangantur, paribus viribus ſollicitabuntur.

Coroll. 3.

44. Quin etiam ſi in vaſe tantum aqua contineatur, eaque vero in aliis locis alio caloris gradu fuerit praedita, quaeuis portio denſitatem ſuo caloris gradui propriam habebit: neque ob preſſiones internas vlla mutatio in permixtione exorietur. Si enim per communicationem mutuam mox omnis aqua ad eundem calorem reducitur, id ob aliam contingit rationem phyſicam ad quam hic non attendimus.

Scholion.

45. Quando experientia oſtendit in tali diuerſorum fluidorum permixtione denſiora fundum petere, rariora vero furſum pelli hoc manifeſto a grauitate proficiſcitur, quae in denſioribus maior eſt, in rarioribus minor. Hic autem omnes cogitationes a grauitate aliisque ſimilibus viribus internis abſtrahimus,

himus, vnde etiam illi effectui nullus locus conceditur. Plurimum autem interest nosse, remota grauitate omnem variorum fluidorum permixtionem aeque subsistere posse, neque etiam pressiones externas vllam mutationem efficere valere: ne eos effectus, quos grauitate admissa euenire videmus alii cuipiam causae adscribamus. Simili modo corporum huiusmodi fluidis immersorum ratio est comparata, quae siue sint densiora siue rariora fluida in eodem perpetuo loco perseuerant, neque a viribus vndique aequaliter prementibus vllam impulsionem ad motum recipiunt. Id tantum euenire potest, vt si tale corpus fuerit lagena vitrea caua, ac pressiones eius robur superent, ea diffringatur sicque eius particulae ad motum introrsum concitentur, iste vero effectus neutiquam ad praesens institutum est referendus; aeque parum ac ille, quo fluidum in variis locis vario calore praeditum per communicationem mox ad eundem caloris gradum redigi videmus, qui effectus non tam pressioni internae quam alii causae physicae adscribi debet, etsi negare nolim eum ab maiorem pressionem mutuam accelerari posse. Tum vero hic inprimis tota moles spectari potest, quae si fuerit satis vasta, vtique euenire potest, vt gradus caloris in variis regionibus maxime discrepet, et diutissime sine alteratione conseruetur.

Pro-

Problema 2.

46. Si fluidum compressionis capax in vase contentum a vi quacunque ope emboli comprimatur, praeter pressionem definire densitatem in singulis locis, cum id fuerit in statum aequilibrii redactum.

Solutio.

Tab. V. Fig. 2. Fluidum ergo aëri simile in vase A B C D E F contineri assumimus, quod a data vi, quae pondere $= P$ exhibeatur, embolum pO vrgente eousque iam sit redactum, vt in aequilibrio consistat. Quod cum euenerit pressio perinde se habebit, ac praecedente casu, quia natura fluidi hic nullam diuersitatem parit, ad eam ergo definiendam sit basis emboli $O = ff$ et quaeratur columna eiusdem basis ff et altitudinis $= p$ quae ex materia illa vniformi densitatis $= 1$ constans habitura esset pondus $= P$ atque haec altitudo p tam in ipsa fluidi massa quam in vasis lateribus vbique pressionem mensurabit, prorsus vt in praecedente problemate ostendimus. Quod autem nunc ad densitatem fluidi in singulis punctis attinet, videndum est vtrum vbique idem caloris gradus versetur nec ne? Vtrumuis igitur contigerit, ponamus in Q gradum caloris esse $= r$ et quia fluidi natura certam supponit legem, secundum quam pressio tam a densitate quam calore pendet, ob datam hic pressionem $= p$, ex ea lege, quomodocunque fuerit comparata, determinabitur densi-

densitas fluidi in hoc loco Q, quod si in omnibus punctis fiat, per totam fluidi massam iam innotescet densitas siue ea fuerit vbique constans siue variabilis: neque hic refert, vtrum tota massa sit fluidum eiusdem generis nec ne?

Coroll. 1.

47. Ad aequilibrium igitur producendum embolum eousque adigi oportet, donec ob auctam densitatem, pressio interna aequalis fiat vi embolum vrgenti, quae aequalitas ex altitudine p est aestimanda.

Coroll. 2.

48. Si embolus tum vasi affigatur, vt fluidum in vase vndique clauso contineatur, omnia in eodem statu manebunt, pressio scilicet vbique erit eadem, altitudine $= p$ agnoscenda, et ex hac pressione et calore in singulis punctis Q densitas agnoscetur.

Coroll. 3.

49. Vicissim ergo quoque si huiusmodi fluidum in vase clauso contineatur pressio per totum vas erit eadem, ideoque ex cognita densitate et calore in quouis loco cognoscetur. Simul ergo intelligitur, quanta vi P embolo applicanda, opus foret, ad fluidum in hunc statum compellendum.

Scholion 1.

50. Ex cognita densitate in singulis punctis massa totius fluidi definiri potest, tota enim massa in elementa infinite parua diuisa, cuiusque volumen multiplicetur per densitatem, et huius formulae integrale per totum fluidum extensum dabit massam fluidi, simulque pondus quod ob grauitatem esset habiturum. Quod cum inertiae sit proportionale, in motus determinatione potissimum erit considerandum, quia hic autem adhuc circa aequilibrium versamur, massae et inertiae consideratio nondum in computum venit. Hic tantum monuisse sufficit, quomodocunque eadem fluidi massa a viribus externis in maius minusue volumen redigatur, inertiam seu materiae quantitatem perpetuo eandem manere: neque etiam ob auctum minutumue calorem vllam alterationem pati.

Scholion 2.

51. Stabilita pressionis mensura quae ad nostrum institutum maxime est accommodata, eadem suppeditat nobis idoneam rationem densitatem cuiusque fluidi metiendi. Cum enim illa mensura sit petita a materia quadam homogenea, cuius densitatem vt cognitam spectamus et vnitate designamus, cuiuscunque alius fluidi densitatem certo numero exprimi oportet, qui scilicet sit ad vnitatem vt haec densitas ad illam: ac si fluidi densitas non vbi-

que ſit eadem, pro quolibet loco numero variabili, qui ſit q eam denotari conueniet. Quod autem ad calorem attinet, cuius ratio etiam eſt habenda, nulla certa menſura eius adhuc eſt cognita, vnde definire liceat, quando alius calor alio ſit duplo maior, thermometra enim nihil aliud declarant, niſi alium caloris gradum alio vel eſſe maiorem vel minorem. Liberum ergo nobis eſt, modo quocunque varios caloris gradus metiendi vti; vnde pro aëre hic modus videtur maxime idoneus, vt ſi pro denſitate data $q = b$ et certo calore $r = c$ preſſio fuerit $p = a$, tum is calor duplus $r = 2c$ cenſeatur, qui pro eadem denſitate aëri preſſionem duplam $p = 2a$ inducat, vnde manente denſitate $q = b$ pro quocunque calore r preſſio erit $p = \frac{ar}{b}$: ſicque viciſſim ex preſſione p gradus caloris r colligi poteſt. Cum deinde praeterea pro eodem calore preſſio ſit denſitati proportionalis, ſiquidem denſitas ab vtroque limite extremo multum diſtet, pro aëre hac formula generali $p = \frac{aqr}{bc}$ vti licebit. Generatim ergo erit calor directe vt preſſio ſeu elaſticitas aëris, ac reciproce vt eius denſitas: quorum elementorum illud ex barometro, hoc vero ex thermometro aëreo cognoſcitur. Pro aqua autem productum qr videtur eſſe quantitas conſtans.