DE SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

Auctore LEON. EVLERO.

§. 1.

Cum series conuergentes ita definiantur, vt constent terminis continuo decrescentibus, qui tandem, si series in infinitum processerit penitus euanescant; facile intelligitur, quarum serierum termini infinitesimi non in nihilum abeant, sed vel finiti maneant, vel in infinitum excrescant, eas, quia non sunt conuergentes, ad classem serierum diuergentium referri oportere. Prout igitur termini seriei vltimi, ad quos progressione in infinitum continuata peruenitur, fuerint vel magnitudinis finitae, vel infinitae, duo habebuntur serierum diuergentium genera, quorum vtrumque porro in duas species subdiuiditur, prout vel omnes termini eodem sint affecti signo, vel signa + et − alternatim se excipiant. Omnino ergo habebimus quatuor serierum diuergentium species, ex quibus maioris perspicuitatis gratia aliquot exempla subiungam.

I. . . .	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ etc.
	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} +$ etc.
II. . . .	$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc.
	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} +$ etc.
III. . . .	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +$ etc.
	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 +$ etc.
IV. . . .	$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ etc.
	$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 +$ etc.

§. 2. De fummis huiusmodi ferierum diuergentium magnus eft diffenfus inter Mathematicos, dum alii negant, alii affirmant, eas in vna fumma comprehendi poffe. Ac primo quidem perfpicuum eft, ferierum, quas ad fpeciem primam retuli, fummas reuera effe infinite magnas, cum terminis actu colligendis ad fummam dato quouis numero maiorem perueniatur: vnde nullum quidem eft dubium, quin harum ferierum fummae per huiusmodi expreffiones $\frac{a}{o}$ exhiberi queant. Circa reliquas igitur fpecies potiffimum verfatur controuerfia inter Geometras; atque argumenta, quae vtrinque ad fententiam tuendam afferuntur, tanta vi ad perfuadendum funt praedita, vt neutra pars adhuc alteri affenfum praebere cogi potuerit.

§. 3. Ex fpecie fecunda Leibnitius primus hanc contemplatus eft feriem:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{ etc.}$$

cuius fummam valere $= \frac{1}{2}$ ftatuerat, his fatis firmis rationibus innixus: Primum enim haec feries prodit, fi fractio haec $\frac{1}{1+a}$ per diuifionem continuam more folito in hanc feriem $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \text{ etc.}$ refoluatur, et valor litterae a vnitati aequalis fumatur. Tum vero etiam ad hoc magis confirmandum, iisque, qui calculo non funt affueti, perfuadendum, fequenti vfus eft ratiocinio: Si feries alicubi terminetur, terminorumque numerus fuerit par, tum valor eius erit $= 0$, fin autem terminorum numerus fit impar, valor feriei erit $= 1$: quodfi ergo feries in infinitum progrediatur, numerusque terminorum, neque par, neque impar, cenferi queat, fummam neque $= 0$, neque $= 1$, effe poffe concludit, fed medium

medium quendam valorem, ab vtroque aeque diuersum, tenere debere, qui sit $= \frac{1}{2}$.

§. 4. Contra haec argumenta ab aduersariis obiici solet; primo fractionem $\frac{1}{1+a}$ non esse aequalem seriei infinitae:

$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - \text{etc.}$$

nisi a sit fractio vnitate minor. Si enim diuisio vspiam abrumpatur, et quoto ex residuo portio debita adiiciatur, fontem paralogismi fore manifestum; fieri namque

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots\ldots\ldots \pm a^n \mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$$

et quamuis numerus n statuatur infinitus, tamen fractionem adiectam $\mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ omitti non licere, nisi re vera euanescat, quod iis tantum casibus, quibus $a < 1$, vsu venit, seriesque euadit conuergens. Reliquis autem casibus semper huius mantissae $\mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ rationem haberi oportere, et quamuis signo dubio $\mp$, prout n fuerit numerus vel par, vel impar, sit affecta, tamen si n sit infinitus, ideo negligi non posse, quod numerus infinitus neque sit par, neque impar, nullaque propterea habeatur causa, vtrum signum potius sit adhibendum? absurdum enim esse putare, quemquam dari numerum integrum, ne infinitum quidem, qui neque par sit, neque impar.

§. 5. Verum in hac obiectione ab illis, qui seriebus diuergentibus determinatas summas tribuunt, iure reprehendi solet, quod numerus infinitus tanquam numerus determinatus concipiatur, atque adeo vel par, vel impar

impar statuatur, cum tamen sit indeterminatus. Statim enim atque series dicatur in infinitum progredi, huic ideae contrarium esse, si eiusdem seriei terminus quidam vltimus etsi infinitesimus concipiatur: ideoque obiectionem ante memoratam de mantissa vltimo termino addenda, vel subtrahenda, sponte euanescere. Cum igitur in serie infinita nunquam ad finem perueniatur, nunquam etiam ad eiusmodi locum perueniri, vbi necesse esset mantissam illam adiungere; adeoque hanc ipsam mantissam nonsolum negligi posse, sed etiam debere, quod nusquam ei locus relinquitur. Atque haec argumenta, quae ad summas serierum diuergentium vel asserendas, vel refellendas, afferuntur, quoque ad quartam speciem spectant, quae nullis praeterea dubiis ipsi propriis vexari solet.

§. 6. Sed ii, qui contra summas serierum diuergentium disputant, in specie tertia firmissimum praesidium inuenire arbitrantur. Quanquam enim harum serierum termini continuo crescunt, ideoque terminis actu colligendis ad summam quouis assignabili numero maiores perueniri potest, quae est definitio infiniti; tamen patroni summarum in hac specie eiusmodi series admittere coguntur, quarum summae sint finitae, atque adeo negatiuae, seu nihilo minores. Cum enim fractio $\frac{1}{1-a}$ per diuisionem in seriem euoluta det; $1+a+a^2+a^3+a^4+$ etc. deberet esse:

$$-1=1+2+4+8+16+\text{ etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2}=1+3+9+27+81+\text{ etc.}$$

quod aduersariis non immerito absurdissimum videtur cum per additionem numerorum affirmatiuorum nunquam

nunquam ad ſummam negatiuam perueniri queat. Hincque eo magis neceſſitatem mantiſſae addendae ante memoratae vrgent, cum ea adiecta perſpicuum ſit, fore

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 \ldots\ldots\ldots + 2^n + \frac{2^{n+1}}{1-2}$$

etiamſi n ſit numerus infinitus.

§. 7. Defenſores igitur ſummarum ſerierum diuergentium ad hoc inſigne paradoxon conciliandum, ſubtile magis, quam verum, diſcrimen inter quantitates negatiuas ſtatuunt; dum alias nihilo minores, alias vero infinito maiores, ſeu plusquam infinitas eſſe arguunt. Alium ſcilicet valorem ipſius -1 agnoſci debere, quando ex ſubtractione numeri maioris $a+1$, a minori a oriri concipitur, alium vero, quando ſeriei illi $1+2+4+8+16+$ etc. aequalis reperitur, atque ex diuiſione numeri $+1$ per -1 naſcitur; illo quippe caſu eſſe numerum nihilo minorem, hoc vero infinito maiorem. Maioris confirmationis gratia afferunt hoc exemplum fractionum:

$$\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{0},\ \tfrac{1}{-1},\ \tfrac{1}{-2},\ \tfrac{1}{-3},\ \text{etc.}$$

quae cum prioribus terminis creſcens perſpiciatur, etiam continuo creſcere ſit cenſenda; vnde concludunt fore $\frac{1}{-1} > \frac{1}{0}$ et $\frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$, ſicque porro: ideoque quatenus $\frac{1}{-1}$ per -1 et $\frac{1}{0}$ per infinitum ∞ exprimitur, eſſe $-1 > \infty$, multoque magis $\frac{-1}{2} > \infty$: quo pacto abſurditatem apparentem illam ſatis ingenioſe a ſe propellunt.

§. 8. Quamuis autem haec diſtinctio ingenioſe excogitata videatur, tamen aduerſariis parum ſatisfacit, atque adeo certitudini analyſeos vim afferre videtur. Si enim bini illi valores ipſius -1, quatenus eſt vel $= 1-2$, vel

vel $= \frac{1}{-1}$, inter se re vera discrepent, vt eos confundere non liceat, certitudo atque vsus regularum, quas in calculis sequimur, penitus tolleretur, quod certe magis foret absurdum, quam id, cuius gratia haec distinctio est excogitata; sin autem sit $1-2 = \frac{1}{-1}$, vti praecepta algebrae postulant, negotium minime conficitur, cum ea ipsa quantitas -1, quae seriei $1 + 2 + 4 + 8 +$ etc. aequalis statuitur, sit nihilo minor, ideoque eadem difficultas permaneat. Interim tamen veritati consentaneum videtur, si dicamus easdem quantitates, quae sint nihilo minores, simul infinito maiores censeri posse. Non solum enim ex algebra, sed etiam ex geometria discimus, duplicem dari saltum a quantitatibus positiuis ad negatiuas, alterum per cyphram, seu nihilum, alterum per infinitum: atque adeo quantitates a cyphra, tam crescendo, quam decrescendo, in se redire, et ad eundem terminum o reuerti; ita vt quantitates infinito maiores eaedem perinde sint nihilo minores, ac quantitates infinito minores conueniunt cum quantitatibus nihilo maioribus.

§. 9. Qui autem negant has summas serierum diuergentium, quae assignari solent, esse iustas, iidem non solum non alias proferunt, sed etiam statuunt omnino pugnare, summam seriei diuergentis tantum imaginari. Conuergentium enim serierum, veluti huius $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ etc. ideo tantum summam $= 2$ admitti posse, quod quo plures istius seriei terminos actu addamus, eo propius nos ad binarium peruenire: in seriebus vero diuergentibus rem longe secus se habere; quo plures enim terminos addamus, eo magis summas,

quae

quae prodeunt, inter se discrepare, neque ad certum ac determinatum quemdam valorem accedere. Vnde concludunt, ne ideam quidem summae ad series diuergentes transferri posse, eorumque operam, quae in summis serierum diuergentium inuestigandis consumatur, plane esse inutilem, verisque analyseos principiis contrariam.

§. 10. Quantumuis autem iste dissensus realis videatur, tamen neutra pars ab altera vllius erroris argui potest, quoties in analysi huiusmodi serierum vsus occurrit: quod graui argumento esse debet, neutram partem in errore versari, sed totum dissidium in solis verbis esse positum. Si enim in calculo peruenio ad hanc seriem $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. eiusque loco substituo $\frac{1}{2}$; nemo certe mihi iure errorem imputabit; qui tamen nemini non in oculos incurreret, si alium quemuis numerum eius seriei loco posuissem; vnde nullum dubium superesse potest, quin series $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. et fractio $\frac{1}{2}$ sint quantitates aequiualentes, alteramque alterius loco semper sine errore substitui licere. Tota igitur quaestio huc tantum redire videtur, an fractionem $\frac{1}{2}$ recte summam seriei $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. vocemus? quod, qui pertinaciter negant, cum tamen aequiualentiam negare non audeant, vehementer verendum est, ne in logomachiam delabantur.

§. 11. Puto autem, totam hanc litem facile compositum iri, si ad sequentia sedulo attendere velimus. Quoties in analysi ad expressionem vel fractam, vel transcendentem, pertingimus; toties eam in idoneam seriem conuertere solemus, ad quam sequens calculus commodius applicari queat. Eatenus ergo tantum series

 infini-

infinitae in analysi locum inueniunt, quatenus ex euolutione cuiuspiam expressionis finitae sunt ortae; et hanc ob rem in calculo semper loco cuiusque seriei infinitae eam formulam, ex cuius evolutione est nata, substituere licet. Hinc quemadmodum summo cum fructu regulae tradi solent, expressiones finitas, sed forma minus idonea praeditas, in series infinitas conuertendi, ita vicissim vtilissimae sunt censendae regulae, quarum ope, si proposita fuerit series infinita quaecunque, ea expressio finita inuestigari queat, ex qua ea resultet; et cum haec expressio, semper sine errore loco seriei infinitae substitui possit, necesse est, vt vtriusque idem sit valor; ex quo efficitur, nullam dari seriem infinitam, quin simul expressio finita illi aequiualens concipi queat.

§. 12. Si igitur receptam summae notionem ita tantum immutemus, vt dicamus, cuiusque seriei summam esse expressionem finitam, ex cuius euolutione illa ipsa series nascatur; omnes difficultates, quae ab vtraque parte sunt commotae, sponte euanescent. Primo enim ea expressio, ex cuius euolutione nascitur series conuergens, eius simul summam, voce hac vulgari sensu accepta, exhibet, neque si series fuerit diuergens, quaestio amplius absurda reputari poterit, si eam indagemus expressionem finitam, quae secundum regulas analyticas euoluta, illam ipsam seriem producat. Et quoniam istam expressionem in calculo loco eius seriei substituere licet, quin eidem sit aequalis, dubitare non poterimus. Quo euicto, ne a recepto quidem loquendi vsu recedimus, si eam expressionem, quae cuipiam seriei aequalis est, eius quoque summam vocemus: dummodo pro seriebus feriebus diuergentibus, non eam notionem cum idea fummae coniungamus, quod, quo plures termini actu colligantur, eo propius ad valorem fummae accedi debeat.

§. 13. His praemiffis neminem fore arbitror, qui me reprehendendum putet, quod in fummam fequentis feriei diligentius inquifiuerim:

$$1-1+2-6+24-120+720-5040+40320-\text{etc.}$$

quae eft feries a Wallifio hypergeometrica dicta, fignis alternantibus inftructa. Haec feries autem eo magis notatu digna videtur, quod plures fummandi methodos, quae mihi alias in huiusmodi negotio ingentem vfum praeftiterunt, hic fruftra tentauerim. Primo quidem dubitare licet, vtrum haec feries fummam habeat finitam, nec ne? quia multo magis diuergit, quam vlla feries geometrica; fummam autem geometricarum effe finitam, extra dubium eft pofitum. Veruntamen cum in geometricis diuergentia non obftet, quominus fint fummabiles, ita verifimile videtur, et hanc feriem hypergeometricam fummam habere finitam. Quaeritur ergo in numeris, proxime faltem, valor eius expreffionis finitae, ex cuius euolutione ipfa feries propofita nafcitur.

§. 14. Primo autem vfus fum methodo, quae hoc nititur fundamento: fi propofita fit huiusmodi feries:

$$s = a - b + c - d + e - f + g - h + \text{etc.}$$

atque neglectis fignis terminorum a, b, c, d, e, f, etc. fumantur differentiae: $b-a$, $c-b$, $d-c$, $e-d$, etc. harumque porro differentiae: $c-2b+a$; $d-2c+b$;

$e-2d+c$; etc. quae dicuntur differentiae secundae; similique lege quaerantur differentiae tertiae, quartae, quintae, etc. tum si harum differentiarum primarum, secundarum, tertiarum, quartarum etc. termini primi sint α, β, γ, δ, etc. dico fore eiusdem seriei propositae summam

$$s = \frac{a}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} - \frac{\gamma}{16} + \frac{\delta}{32} - \text{etc.}$$

quae nisi iam sit conuergens, tamen certo multo magis conuerget, quam proposita; vnde si huic posteriori seriei demo eadem methodus applicetur, valor, seu summa quaesita s, expressa reperietur per seriem adhuc magis conuergentem.

§. 15. Methodus haec maximam habet vtilitatem in summandis seriebus diuergentibus secundae et quartae speciei, siue tandem ad differentias constantes perueniatur, siue secus, dummodo diuergentia non sit nimis magna. Sic si sit $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.}$

ob $a = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ etc. erit $s = \frac{1}{2}$.

Si sit $s = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.}$

diff. 1   1, 1, 1, 1, 1. etc.

erit $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; vti aliunde satis constat:

si sit $s = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \text{etc.}$

Diff. I . . 3   5   7   9   11

diff. II . . . 2,   2,   2   2

erit $s = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = 0$, vti quoque notum est:

sit sit $s = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \text{etc.}$

Diff.

Diff. 1 . . . 2, 6, 18, 54, 162
diff. 2 . . . . 4, 12, 36, 108
diff. 3 . . . . . 8, 24, 72
diff. 4 . . . . 16, 48
etc.

eritque $s = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{4}{8} - \frac{8}{16} + \text{etc.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \text{etc.} = \frac{1}{4}$

§. 16. Adhibeatur iam haec methodus ad seriem propositnm

$A = 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - 5040 + 40320 - \text{etc.}$

quae ob $1 - 1 = 0$, si per 2 diuidatur, abit in hanc:

$\frac{A}{2} = 1 - 3 + 12 - 60 + 360 - 2520 + 20160 - 181440 + \text{etc.}$

2, 9, 48, 300, 2160, 17640, 161280
7, 39, 252, 1860, 15480, 143640
32, 213, 1608, 13620, 128160
181, 1395, 12012, 114540
1214, 10617, 102528
9407, 91911
82504.

Hinc ergo sequitur fore:

$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{7}{8} - \frac{32}{16} + \frac{181}{32} - \frac{1214}{64} + \frac{9407}{128} - \frac{82504}{256} + \text{etc.}$

seu $A = \frac{7}{4} - \frac{32}{8} + \frac{181}{16} - \frac{1214}{32} + \frac{9407}{64} - \frac{82504}{128} + \text{etc.}$

$\frac{18}{8}$, $\frac{117}{16}$; $\frac{852}{32}$, $\frac{6979}{64}$, $\frac{63690}{128}$
$\frac{81}{16}$; $\frac{618}{32}$, $\frac{5275}{64}$, $\frac{49732}{128}$
$\frac{456}{32}$, $\frac{4039}{64}$, $\frac{39182}{128}$
$\frac{3127}{64}$, $\frac{31104}{128}$
$\frac{24850}{128}$

Ergo

Ergo $A = \frac{7}{8} - \frac{18}{32} + \frac{81}{128} - \frac{456}{512} + \frac{3127}{2048} - \frac{24850}{8192} + \text{ect.}$

seu $A - \frac{5}{16} = \frac{81}{128} - \frac{456}{512} + \frac{3127}{2048} - \frac{24850}{8192} + \text{etc.}$

$$\begin{array}{ccccc} \frac{132}{512}; & & \frac{1303}{2048}, & & \frac{12342}{8192} \\ & \frac{775}{2048}; & & \frac{7130}{8192} & \\ & & \frac{4030}{8192} & & \end{array}$$

Ergo $A - \frac{5}{16} = \frac{81}{256} - \frac{132}{2048} + \frac{775}{16384} - \frac{4030}{131072}$

seu $A = \frac{5}{16} + \frac{516}{2048} + \frac{2170}{131072}$ etc. $= \frac{38077}{65536} = 0,581$.

Apparet ergo ſummam iſtius ſeriei propemodum eſſe $= 0,581$: ob terminos autem neglectos aliquanto erit maior: quod egregie conuenit cum infra demonſtrandis, vbi huius ſeriei ſumma oſtendetur eſſe $= 0,59634739$: ſimul vero patet, hanc methodum non ſatis eſſe aptam, ad ſummam tam exacte definiendam.

§. 17. Deinde alio modo rem ſic tentaui: ſit propoſita haec ſeries:

$$\begin{array}{lcccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & n & n+1 \\ B \ldots & 1, & 2, & 5, & 16, & 65, & 326, & 1957, & \ldots & P, & nP+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{differentiae } 1,\ 3,\ 11,\ 49,\ 261,\ 1631 \\ \qquad\qquad 2,\ 8,\ 38,\ 212,\ 1370 \\ \qquad\qquad\quad 6,\ 30,\ 174,\ 1158 \\ \qquad\qquad\qquad 24,\ 144,\ 984 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 120,\ 840 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 720 \end{array}$$

cuius differentiarum continuarum termini primi ſint 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. erit terminus exponenti n reſpondens

$P =$

$$P = 1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \text{etc.}$$

Hinc ſi fiat $n = o$, erit terminus exponenti o reſpondens, ſeu primum praecedens $= 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.} = A$; ita vt ſi huius ſeriei terminus exponenti o reſpondens inueniri poſſet, idem ſimul futurus eſſet valor, ſeu ſumma ſeriei propoſitae

$$A = 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.}$$

Quodſi ergo illa ſeries B inuertatur, vt habeatur ſeries

$$\begin{array}{llllllll} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ C \ldots & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{16}, & \frac{1}{65}, & \frac{1}{326}, & \frac{1}{1957}, \text{ etc.} \end{array}$$

erit huius ſeriei terminus exponenti o reſpondens $= \frac{1}{A}$, vnde ex eo quoque valor ipſius A cognoſci poterit. Inchoent huius ſeriei ſingulae differentiae terminis α, β, γ, δ, ε, etc. differentiis ſcilicet hic ita capiendis, vt quiuis terminus a praecedente ſubſtrahatur, erit terminus exponenti n reſpondens:

$$\frac{1}{P} = 1 - (n-1)\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\beta - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\gamma + \text{etc.}$$

Ideoque poſito $n = o$, erit per ſeriem certo conuergentem:

$$\frac{1}{A} = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

Eſt vero, has fractiones in decimales conuertendo:

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5
$1 = 1,0000000$					
$\frac{1}{2} = 0,5000000$	5000000	2000000			
$\frac{1}{5} = 0,2000000$	3000000	1625000	375000	-346154	
$\frac{1}{16} = 0,0625000$	1375000	903846	721154	$+165291$	-511445
$\frac{1}{65} = 0,0153846$	471154	347983	555863	$+305486$	-140195
$\frac{1}{326} = 0,0030675$	123171	97606	250377	$+173956$	$+131530$
$\frac{1}{1957} = 0,0005110$	25565	21185	76421	$+58977$	$+114979$
0,0000730	4380	3741	17444	$+14261$	$+44716$
0,0000091	639	558	3183	$+2697$	$+11564$
0,0000010	81	72	486	$+422$	$+2275$
0,0000001	9	8	64	$+57$	$+365$
	1	1	7	$+6$	$+51$
			1		

Ex his ergo differentiis foret $\frac{1}{A} = 1,651740 1$, et $A = 0,6$; qui ſatis bene cum ante inuento conuenit; ſed tamen ob differentias quartas, quintas, et aliquot ſequentium negatiuas, haec methodus non ſatis eſt certa.

§. 18. Sumamus ſeriei B ſingulorum terminorum logarithmos, vt habeatur haec noua ſeries

$$\begin{array}{lllllllll} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ D \ldots\ldots & l1, & l2, & l5, & l16, & l65, & l326, & l1957, & l13700, \text{ etc.} \end{array}$$

in cuius differentiis continuis more ſolito ſumtis ſint termini primi α, β, γ, δ, ε, etc. eritque huius ſeriei terminus exponenti o reſpondens $= o - \alpha + \beta - \gamma + \delta - \varepsilon +$ etc. qui igitur erit logarithmus ſummae quaeſitae $= A$. Sunt vero hi logarithmi cum differentiis continuis ſequentes:

diff.

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5	diff. 6	diff. 7	diff. 8
0,0000000	0,3010300							
0,3010300	0,3979400	969100						
0,6989700	0,5051500	1072100	103000					
1,2041200	0,6087934	1036434	− 35666	− 138666				
1,8129134	0,7003042	915108	− 121326	− 85660	+ 53006	+ 19562		
2,5132176	0,7783732	789690	− 134418	− 12092	+ 72568	− 38182	− 57744	+ 65446
3,2915908	0,8451298	667566	− 113124	+ 21294	+ 34386	− 30480	+ 7702	
4,1397206	0,9030940	579642	− 87924	+ 25200	+ 3906			
5,0398146								

ergo erit:

	diff. 1	diff. 2	diff. 3	diff. 4	diff. 5	diff. 6
$lA =$ − 0,3010300 +						
+ 0,0969100 +	+ 2041200					
− 0,0103000 +	+ 866100	+ 1175100				
− 0,0138666 −	+ 241666	+ 1624434	+ 550666			
− 0,0053006 +	− 191672	+ 433338	+ 191096	+ 359570		
+ 0,0019562 +	+ 33444	− 225116	+ 658454	− 467358	+ 826928	
+ 0,0057744 −	+ 77306	− 43862	− 181254	+ 839708	− 1307066	+ 2133994
+ 0,0065446 +	− 123190	+ 200496	− 244358	+ 63104	+ 776604	− 2083670

vnde per methodum ante expoſitam erit.

$$l\frac{1}{A} = \frac{0,3010300}{2} + \frac{2041200}{4} + \frac{1175100}{8} + \frac{550666}{16} + \frac{359570}{32} + \frac{826928}{64} + \text{etc.}$$

ſeu $l\frac{A}{1} = 0,\ 7779088$ hincque $A = 0,\ 59966$, quem numerum adhuc vero maiorem eſſe, facile colligere licet. Interim tamen et hoc modo neque ſatis tuto, neque ſatis commode, ad cognitionem valoris A perueniri poteſt, etſi haec methodus infinitas ſuppeditat vias hunc valorem inveſtigandi; quarum quidem aliae aliis ad hunc ſcopum multo aptiores videntur.

 §. 19.

§. 19. Inveſtigemus nunc etiam analytice huius ſeriei valorem, eam vero in latiori ſenſu accipiamus: ſit igitur

$$s = x - 1x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - 120x^6 + \text{etc.}$$

quae differentiata dabit:

$$\frac{ds}{dx} = 1 - 2x + 6xx - 24x^3 + 120x^4 - \text{etc.} = \frac{x-s}{xx}$$

vnde fit $ds + \frac{s\,dx}{xx} = \frac{dx}{x}$, cuius aequationis, ſi e ſumatur pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, integrale erit $e^{-1:x}s = \int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$ et $s = e^{1:x} \int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$. Caſu ergo quo $x = 1$ erit $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.}$ $= e\int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$. Exprimit ergo haec ſeries aream lineae curuae, cuius natura inter abſciſſam x et y hac continetur aequatione $y = \frac{e.e^{-1:x}}{x}$, ſi abſciſſa x ponatur $= 1$: ſeu erit $y = \frac{e}{e^{1:x}x}$. Haec autem curua ita eſt comparata, vt poſito $x = 0$ fiat $y = 0$; ſin autem ſit $x = 1$, erit $y = 1$: medii vero applicatae valores ita ſe habebunt, vt

ſi ſit

ſi ſit	fiat	ſi ſit	fiat
$x = \frac{0}{10}$	$y = 0$	$x = \frac{5}{10}$	$y = \frac{10}{5e^{5:5}} = \frac{2}{e}$
$x = \frac{1}{10}$	$y = \frac{10}{e^{9:1}}$	$x = \frac{6}{10}$	$y = \frac{10}{6e^{4:6}}$
$x = \frac{2}{10}$	$y = \frac{10}{2e^{8:2}}$	$x = \frac{7}{10}$	$y = \frac{10}{7e^{3:7}}$
$x = \frac{3}{10}$	$y = \frac{10}{3e^{7:3}}$	$x = \frac{8}{10}$	$y = \frac{10}{8e^{2:8}}$
$x = \frac{4}{10}$	$y = \frac{10}{4e^{6:4}}$	$x = \frac{9}{10}$	$y = \frac{10}{9e^{1:9}}$

Hac igitur curva conſtructa, ſtatim patebit, eius aream abſciſſae $x = 1$ reſpondentem, non ſolum eſſe finitam, ſed etiam minorem eſſe quadrato lateris $= 1$, maiorem vero eius ſemiſſi $\frac{1}{2}$. Quodſi vero baſis $x = 1$ in decem partes aequales diuidatur, et portiones areae tanquam trapezia ſpectentur, et areae inueſtigentur, obtinebitur ſeriei $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. $= A$ valor vero proximus:

$$A = 0 + \frac{1}{e^{9:1}} + \frac{1}{2e^{8:2}} + \frac{1}{3e^{7:3}} + \frac{1}{4e^{6:4}} + \frac{1}{5e^{5:5}} + \frac{1}{6e^{4:6}}$$
$$+ \frac{1}{7e^{3:7}} + \frac{1}{8e^{2:8}} + \frac{1}{9e^{1:9}} + \frac{1}{20}$$

Qui termini, cum ſit $e = 2,718281828$, induent ſequentes valores:

$$\frac{1}{e^{9:1}} = 0{,}00012340$$

$$\frac{1}{2e^{8:2}} = 0{,}00915782$$

$$\frac{1}{3e^{7:3}} = 0{,}03232324$$

$$\frac{1}{4e^{6:4}} = 0{,}05578253$$

$$\frac{1}{5e^{5:5}} = 0{,}07357587$$

$$\frac{1}{6e^{4:6}} = 0{,}08556950$$

$$\frac{1}{7e^{3:7}} = 0{,}09306270$$

$$\frac{1}{8e^{2:8}} = 0{,}09735002$$

$$\frac{1}{9e^{1:9}} = 0{,}09942656$$

$$\frac{1}{20} = 0{,}05000000$$

hinc $A = 0{,}59637164$

qui valor a vero iam vix ſenſibiliter differt. Si autem abſciſſa in plures partes fuiſſet diuiſa, tum iſte valor accuratius eſſet inuentus.

§. 20. Cum inuenta ſit ſumma $A = \int \frac{e^{1-1:x}\,dx}{x}$, ponatur $v = e^{1-1:x}$, ita vt poſito $x = 0$ fiat et $v = 0$, ac ac posito $x = 1$, $v = 1$, erit $1 - \frac{1}{x} = lv$, et $x = \frac{1}{1-lv}$, atque $lx = -l(1-lv)$, vnde fit $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(1-lv)}$. Quia ergo est $A = \int \frac{v\,dx}{x}$ posito $x = 1$, vel $v = 1$, erit quoque $A = \int \frac{dv}{1-lv}$ posito post integrationem $v = 1$. Erit autem integratione per seriem infinitam peracta $A = \int \frac{dv}{1-lv}$ $= \frac{v}{1-lv} - \frac{1\,v}{(1-lv)^2} + \frac{1.2\,v}{(1-lv)^3} - \frac{1.2.3\,v}{(1-lv)^4} + \frac{1.2.3.4\,v}{(1-lv)^5} - \text{etc.}$ et posito $v = 1$ ob $lv = 0$, erit, vti assumsimus,

$$A = 1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 - 1.2.3.4.5 + \text{etc.}$$

Erit ergo A iterum area curuae, cuius natura inter abscissam v et applicatam y hac exprimitur aequatione $y = \frac{1}{1-lv}$, si quidem ponatur abscissa $v = 1$, quo casu quoque fit $y = 1$. Notari autem hic oportet lv denotare logarithmum hyperbolicum ipsius v. Abscissa ergo $v = 1$ denuo in decem partes diuisa, applicatae in singulis diuisionum punctis se habebunt hoc modo:

si fit	erit	si fit	erit
$v = \frac{0}{10}$	$y = 0$	$v = \frac{5}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l5}$
$v = \frac{1}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l1}$	$v = \frac{6}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l6}$
$v = \frac{2}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l2}$	$v = \frac{7}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l7}$
$v = \frac{3}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l3}$	$v = \frac{8}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l8}$
$v = \frac{4}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l4}$	$v = \frac{9}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l9}$
$v = \frac{5}{10}$	$y = \frac{1}{1+l10-l5}$	$v = \frac{10}{10}$	$y = 1$

Hincque iterum per appropinquationem areae valor litterae A satis accurate obtinebitur.

§. 21.

§. 21. Datur vero alius modus in summam huius seriei inquirendi ex natura fractionum continuarum petitus, qui multo facilius et promtius negotium conficit: sit enim formulam generalius exprimendo:

$$A = 1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} = \frac{1}{1+B}$$

$$\text{erit } B = \frac{1x - 2x^2 + 6x^3 - 24x^4 + 120x^5 - 720x^6 + 5040x^7 - \text{etc.}}{1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}} = \frac{x}{1+C}$$

$$\text{et } 1+C = \frac{1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + 5040x^6 - \text{etc.}}$$

$$\text{Ergo } C = \frac{x - 4x^2 + 18x^3 - 96x^4 + 600x^5 - 4320x^6 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + \text{etc.}} = \frac{x}{1+D}$$

$$\text{vnde } D = \frac{2x - 12x^2 + 72x^3 - 480x^4 + 3600x^5 - \text{etc.}}{1 - 4x + 18x^2 - 96x^3 + 600x^4 - \text{etc.}} = \frac{2x}{1+E}$$

$$\text{Porro } E = \frac{2x - 18x^2 + 144x^3 - 1200x^4 + \text{etc.}}{1 - 6x + 36x^2 - 240x^3 + \text{etc.}} = \frac{2x}{1+F}$$

$$\text{Atque } F = \frac{3x - 36x^2 + 360x^3 - \text{etc.}}{1 - 9x + 72x^2 - 600x^3 + \text{etc.}} = \frac{3x}{1+G}$$

$$\text{Erit } G = \frac{3x - 48x^2 + \text{etc.}}{1 - 12x + 120x^2} = \frac{3x}{1+H}$$

$$\text{Sic } H = \frac{4x - \text{etc.}}{1 - 16x} = \frac{4x}{1+I}$$

Sicque porro patebit fore $I = \frac{4x}{1+K}$, $K = \frac{1x}{5+L}$; $L = \frac{5x}{1+M}$ etc. in infinitum, ita vt harum formularum ordo facile perspiciatur. His autem valoribus successive substitutis, erit

$$1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} =$$

A =

$$A = \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{7x}{\text{etc.}}}}}}}}}}}}}}}$$

§. 22. Quemadmodum autem huiusmodi fractionum continuarum valor sit investigandus, alibi ostendi: Scilicet cum singulorum denominatorum partes integrae sint vnitates, soli numeratores in computum veniunt; sit ergo $x = 1$, atque investigatio summae A sequenti modo instituetur:

$$A = \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{7},\ \frac{8}{13},\ \frac{20}{34},\ \frac{44}{73},\ \frac{124}{209},\ \frac{300}{501},\ \text{etc.}$$

$$\text{num.}\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ \text{etc.}$$

Fractiones nimirum hic exhibitae continuo propius ad verum valorem ipsius A accedunt, et quidem alternatim eo sunt maiores et minores; ita vt sit:

$$A > \tfrac{0}{1};\ A > \tfrac{1}{2};\ A > \tfrac{4}{7};\ A > \tfrac{20}{34};\ A > \tfrac{124}{209};\ \text{etc.}$$
$$A < \tfrac{1}{1};\ A < \tfrac{2}{3};\ A < \tfrac{8}{13};\ A < \tfrac{44}{73};\ A < \tfrac{300}{051};\ \text{etc.}$$

Hinc in fractionibus decimalibus erunt ipsius A valores

nimis parui	nimis magni
0,0000000000	1,0000000000
0,5000000000	0,6666666666
0,5714285714	0,6153846153
0,5882352941	0,6027397290
0,5933014354	0,5988023952

Si iam inter terminos nimis magnos et nimis paruos proximos, capiantur media arithmetica, denuo prodibunt valores alternatim nimis magni et nimis parui, qui erunt sequentes:

Valores nimis parui	nimis magni ipsius A
0,5000000000	0,7500000000
0,5833333333	0,6190476190
0,5934065933	0,6018099546
0,5954875100	0,5980205807
0,5960519153	

sicque iam satis prope ad verum valorem ipsius A pertigimus.

§. 23. Poterimus autem valorem istius fractionis infinitae per partes inuestigare hunc in modum:

sit A

$$\text{fit } A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{10}{1+\cfrac{10}{1+p}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

$$\text{et } p = \cfrac{11}{1+\cfrac{11}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{15}{1+\cfrac{15}{1+9}}}}}}}}}}$$

$$\text{et } q = \cfrac{16}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{17}{1+\cfrac{17}{1+\cfrac{18}{1+\cfrac{18}{1+\cfrac{19}{1+\cfrac{19}{1+\cfrac{20}{1+\cfrac{20}{1+r}}}}}}}}}}$$

$$\text{erit } r = \cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\text{etc. in infinitum.}}}}}}}$$

 Quibus

Quibus valoribus euolutis reperietur:

$$\text{primo } A = \frac{491459820 + 139931620p}{824073141 + 234662231p}$$

$$\text{Deinde } p = \frac{2381951 + 649286q}{887640 + 186440q}$$

$$\text{et } q = \frac{11437136 + 2924816r}{3697925 + 643025r}$$

Supereſt igitur, vt valor ipſius r definiatur, quod quidem aeque difficile, ac ipſius A: ſed ſufficit hic valorem ipſius r proxime tantum noſſe; error enim quidam in valore ipſius r commiſſus, multo minorem errorem in valore ipſius q efficit, hincque denuo longe minor error in valorem ipſius p irrepit: ex quo tandem error valorem ipſius A inquinans omnino erit imperceptibilis.

§. 24. Deinde quia numeratores 21, 21, 22, 22, 23, etc. qui in fractionem continuam ipſius r ingrediuntur, iam propius ad aequalitatis rationem accedunt, ſaltem ab initio: hinc ſubſidium peti poteſt, ad eius valorem propius cognoſcendum. Si enim hi numeratores omnes eſſent aequales, vt eſſet

$$r = \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \text{etc.}}}}}$$

foret $r = \frac{21}{1+r}$

ideoque $rr + r = 21$, et $r = \frac{\sqrt{85} - 1}{2}$

Cum

Cum autem hi denominatores crescant, hic valor iusto erit minor: Interim tamen concludere licet, si tres sequentes fractiones continuae constituantur:

$$r = \cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad s = \cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{24}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad t = \cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{24}{1+\cfrac{24}{1+\cfrac{25}{1+\text{etc.}}}}}}$$

valores quantitatum r, s, t, in arithmetica progressione esse processuros, foreque $r+t=2s$; vnde valor ipsius r satis accurate colligetur. Quo autem haec inuestigatio latius pateat, pro numeris 21, 22, 23, hos indefinitos accipiamus $a-1$, a et $a+1$, vt sit

$$r = \cfrac{a-1}{1+\cfrac{a-1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a+1}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad s = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+2}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad t = \cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+2}{1+\cfrac{a+2}{1+\cfrac{a+3}{1+\text{etc.}}}}}}$$

eritque:

$$r = \cfrac{a-1}{1+\cfrac{a-1}{1+s}} \qquad s = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+t}};$$ vnde efficitur:

$$r = \frac{(a-1)s+a-1}{s+a} \text{ et } s = \frac{at+a}{t+a+1} \text{ seu } t = \frac{(a+1)s-a}{a-s}$$

 vnde

vnde fit $r + t = \frac{2ss + (2aa - 2a + 1)s - a}{aa - ss} = 2s$: ideoque erit $2s^3 + 2ss - (2a - 1)s - a = 0$, ex qua aequatione valorem ipſius s hincque porro valorem ipſius r determinare licet.

§. 25. Sit nunc $a = 22$, atque habebimus hanc aequationem cubicam reſoluendam.

$$2s^3 + 2ss - 43s - 22 = 0$$

cuius radix ſtatim intra limites 4 et 5 conſtituta deprehenditur. Sit igitur $s = 4 + u$, eritque

$$34 = 69u + 26uu + 2u^3$$

Sit porro $u = 0,4 + v$ erit $u^2 = 0,16 + 0,8u + vv$ atque $u^3 = 0,064 + 0,48v + 1,2v^2 + v^3$, ideoque.

$$2,112 = 90,76v + 28,4v^2 + 2v^3$$

vnde erit, proxime $v = 0,023$, et $s = 4,423$. Cum igitur fit

$$r = \frac{21s + 21}{s + 22} \text{ fiet } r = \frac{113,883}{26,423} = 4,31,$$

hincque porro

$$q = \frac{24043093}{6469363} = 3,71645446: \text{ vnde obtinetur}$$

$$p = \frac{4794992,85}{1584252,22} = 3,0266600163: \text{ hincque tandem}$$

$$A = \frac{914985259,24}{153431593 2,90} = 0,5963473621237$$

qui

qui valor in fractionem continuam conuersus dat

$$A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

vnde sequentes inueniuntur fractiones valorem ipsius A proxime exhibentes:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & 1 & 2 & 10 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 7 \\ A = & \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{5}, & \frac{31}{52}, & \frac{34}{57}, & \frac{65}{109}, & \frac{294}{493}, & \frac{653}{1095}, & \frac{1600}{2683} \end{array}$$

Hae autem fractiones alternatim sunt maiores et minores quam valor ipsius A, ac ultima quidem $\frac{1600}{2683}$ nimis est magna, excessus tamen minor est quam $\frac{1}{2683 \cdot 19876}$; vnde cum sit

$\frac{1}{A} = \frac{2683}{1600}$ erit proxime $\frac{1}{A} = 1,676875$

§. 26. Methodus, qua supra in §. 21. sum vsus ad seriem hanc

$$1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}$$

in

in fractionem continuam conuertendam, latius patet, atque simili modo ad hanc seriem multo generaliorem applicari potest

$$z = 1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \text{etc.}$$

reperietur enim iisdem operationibus institutis:

$$z = \cfrac{1}{1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{nx}{1+\cfrac{(m+n)x}{1+\cfrac{2nx}{1+\cfrac{(m+2n)x}{1+\cfrac{3nx}{1+\cfrac{(m+3n)x}{1+\cfrac{4nx}{1+\cfrac{(m+4n)x}{1+\cfrac{5nx}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

Eadem vero expressio, aliaeque similes facile erui possunt ope theorematum, quae in dissertationibus meis de fractionibus continuis in Comment. Acad. Petropol. demonstraui. Ostendi enim huic aequationi:

$$ax^{m-1}dx = dz + ex^{n-m-1}zdx + bx^{n-1}zdx$$

satis-

satisfacere hunc valorem

$$z = \cfrac{ax^m}{m + \cfrac{(ac+mb)x^n}{m+n+\cfrac{(ac-nb)x^n}{m+2n+\cfrac{(ac+(m+n)b)x^n}{m+3n+\cfrac{(ac-2nb)x^n}{m+4n+\cfrac{(ac+(m+2n)b)x^n}{m+5n+\cfrac{(ac-3nb)x^n}{m+6n+\text{etc.}}}}}}}}$$

Si igitur sit $c = 0$ erit $dz + bx^{n-1}zdx = ax^{m-1}dx$, et $e^{bx^n:n}z$ $= a\int e^{bx^n:n}x^{m-1}dx$ et $z = ae^{-bx^n:n}\int e^{bx^n:n}x^{m-1}dx$, et per seriem

$$z = \frac{ax^m}{m} - \frac{abx^{m+n}}{m(m+n)} + \frac{ab^2x^{m+2n}}{m(m+n)(m+2n)} \quad \frac{ab^3x^{m+3n}}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)} + \text{etc.}$$

In hac autem forma nostra, quam tractamus, non continetur.

§. 27. Inueni autem porro, si habeatur haec aequatio:

$$fx^{m+n}dx = x^{m+1}dz + ax^m zdx + bx^n zdx + czzdx$$

valorem ipsius z per huiusmodi fractionem infinitam exprimi:

$$z = \cfrac{fx^m}{b + \cfrac{(mb+ab+cf)x^{m-n}}{b+\cfrac{(mb+nb+cf)x^{m-n}}{b+\cfrac{(2mb-nb+ab+cf)x^{m-n}}{b+\cfrac{(2mb-2nb+cf)x^{m-n}}{b+\cfrac{(3mb-2nb+ab+cf)x^{m-n}}{b+\cfrac{(3mb-3nb+cf)x^{m-n}}{b+\text{etc.}}}}}}}}$$

 Quo

Quo igitur eundem valorem z commode per feriem ordinariam exprimere queamus, fit $a = o$, vt habeatur haec aequatio:

$$f x^{m+n} dx = x^{n+1} dz + a x^m z dx + b x^n z dx.$$

eritque per fractionem continuam:

$$z = \cfrac{f x^m}{b + \cfrac{b(m+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(m-n)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(2m-n+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(2m-2n)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(3m-2n+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(3m-3n)x^{m-n}}{b + \text{etc.}}}}}}}$$

Integrando vero erit $x^a e^{bx^{n-m}:(n-m)} z = f\int e^{bx^{n-m}:(n-m)} x^{a+n-1} dx$

feu fit $m-n = k$ erit $z = f e^{b:kx^k} x^{-a} \int e^{-b:kx^k} x^{a+n-1} dx$, fi quidem integratio ita inftituatur, vt z euanefcat, pofito $x = o$. Per feriem autem infinitam erit:

$$z = \frac{f}{b} x^m - \frac{(m+a)f}{b^2} x^{2m-n} + \frac{(m+a)(2m-n+a)f}{b^3} x^{3m-2n}$$

$$- \frac{(m+a)(2m-n+a)(3m-2n+a)f}{b^4} x^{4m-3n}$$

$$+ \frac{(m+a)(2m-n+a)(3m-2n+a)(4m-3n+a)f}{b^5} x^{5m-4n} - \text{etc.}$$

§. 28. Quo hae expreffiones fiant fimplices, neque tamen earum extenfioni vis inferatur, ponatur $b = 1$;

$b = 1$; $f = 1$; $m + a = p$; $m - n = q$; vt ſit $a = p - m$; et $n = m - q$; habebiturque haec aequatio differentialis:

$$x^m dx = x^{q+1} dz + (p-m) x^q z\, dx + z\, dx$$

cuius primo integrale eſt: $z = e^{1 : qx^q} x^{m-p} \int e^{-1 : qx^q} x^{p-q-1} dx$ Idem porro valor quantitatis z per ſequentem ſeriem infinitam exprimetur:

$$z = x^m - p x^{m+q} + p(p+q) x^{m+2q} - p(p+q)(p+2q) x^{m+3q} + \text{etc.}$$

Denique huic ſeriei aequiualebit iſta fractio continua:

$$z = \cfrac{x^m}{1 + \cfrac{p x^q}{1 + \cfrac{q x^q}{1 + \cfrac{(p+q) x^q}{1 + \cfrac{2 q x^q}{1 + \cfrac{(p+2q) x^q}{1 + \cfrac{3 q x^q}{1 + \cfrac{(p+3q) x^q}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

quae expreſſio plane congruit cum ea, quam ante §. 26 ſumus adepti, et quoniam de modo, quo illam eruimus, adhuc dubitari poſſet, vtrum numeratores ſecundum legem obſeruatam in infinitum progrediantur nec ne? hoc dubium iam penitus erit ſublatum. Suppeditat ergo haec conſideratio methodum certam innumerabiles ſeries diuergentes ſummandi, ſeu valores ipſis aequiualentes inueniendi: inter quas ea, quam tractauimus eſt caſus particularis.

§. 29. Videtur autem porro casus memoratu dignus, quo est $p = 1$, et $q = 2$, atque $m = 1$; erit enim $z = e^{1:2xx} \int e^{-1:2xx} dx : xx$

atque series infinita ita se habebit:

$$z = x - 1x^3 + 1.3x^5 - 1.3.5x^7 + 1.3.5.7x^9 - \text{etc.}$$

quae aequalis est huic fractioni continuae:

$$z = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1xx}{1 + \cfrac{2xx}{1 + \cfrac{3xx}{1 + \cfrac{4xx}{1 + \cfrac{5xx}{1 + \cfrac{6xx}{1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Si itaque ponatur $x = 1$, vt fiat:

$$z = 1 - 1 + 1.3 - 1.3.5 + 1.3.5.7 - 1.3.5.7.9 + \text{etc.}$$

quae est series maxime diuergens: eius tamen valor exprimi potest per hanc fractionem continuam conuergentem:

$$z = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

quae

quae sequentes suppeditat fractiones, vero ipsius z valori proxime aequales:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ z = & \frac{0}{1}; & \frac{1}{1}; & \frac{1}{2}; & \frac{3}{4}; & \frac{6}{10}; & \frac{18}{26}; & \frac{48}{76}; & \frac{156}{232}; & \frac{492}{764}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 10 & 11 & 12 \\ \frac{1740}{2620}; & \frac{6168}{9496}; & \frac{23568}{35696} \end{array}$$

si igitur sit: $z = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{10}{1+p}}}}}}}}}}}$

erit $z = \frac{23568 + 6168p}{35696 + 9496p}$

seu $z = \frac{2946 + 771p}{4462 + 1187p}$ et $p = \cfrac{11}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{15}{1+\text{etc.}}}}}}$

sit $p = \frac{11}{1+q}$ et $q = \frac{12}{1+r}$; erit $r = \frac{12-q}{q}$

atque cum p, q, r vniformiter crescant, erit $2q = \frac{12+22q-qq}{q+qq}$ et $2q^3 + 3qq - 22q - 12 = 0$, vbi proxime $q = 3,06$; $p = 2,709$; et $z = \frac{5034,630}{7677,683} = 0,655758$.