

CAPUT IX.

DE USU CALCULI DIFFERENTIALIS IN AEQUATIONIBUS RESOLVENDIS.

227.

Constitutionem aequationum ad functionum rationem reduci posse supra iam satis ostensum est. Denotet enim y functionem quamcunque ipsius x , si ponatur $y = 0$, in hac forma omnes omnino aequationes finitae five sint algebraicae five transcendentes comprehenduntur. Aequatio autem $y = 0$ resolvi dicitur, si is ipsius x valor definiatur qui in functione y substitutus, eam actu nihilo aequalem reddat. Plerumque autem plures eiusmodi valores pro x dantur, qui aequationis $y = 0$ radices vocantur. Si igitur ponamus numeros $f, g, h, i, \&c.$ esse radices aequationis $y = 0$, functio y ita erit comparata, ut si in ea loco x vel f , vel g , vel h , &c. substituatur, fiat revera $y = 0$.

228. Quoniam igitur functio y evanescit, si in ea loco x ponatur f , seu $x + (f - x)$, existente f radice aequationis $y = 0$, erit per ea, quae supra de functionibus demonstravimus:

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

ex qua aequatione valor radice f ita definitur, ut quicquid pro x fuerit positum, indeque valores quantitatum $y, \frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{2dx^2}$, &c. substituti, semper resultet aequatio verum valorem ipsius f exhibens. Quo hoc clarius percipiatur, ponamus esse

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4; \text{ erit}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = 3x - 2; \quad \& \quad \frac{d^3y}{6dx^3} = 1$$

Quibus valoribus substitutis oritur:

$$0 = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + (f-x)(3xx - 4x + 3) + (f-x)^2(3x-2) + (f-x)^3$$

seu multiplicationibus actu institutis:

$$f^3 - 2ff + 3f - 4 = 0$$

oritur scilicet aequatio similis ipsi propositae, quae propterea easdem continet radices.

229. Quamquam autem hoc modo ad novam aequationem non pervenitur, ex qua valor radices f facilius definiriqueat; tamen hinc ingentia subsidia ad inventionem radicum deduci possunt. Si enim pro x assumptus fuerit valor iam proxime ad quampiam radicem aequationis accedens, ita ut $f-x$ sit quantitas valde parva, tum termini aequationis:

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

vehementer convergent, hancque ob causam non multum a veritate aberrabitur, si praeter binos terminos initiales reliqui reiiciantur. Erit ergo si pro x iam valor cuiuspiam aequationis $y=0$ radici prope aequalis fuerit assumptus, proxime:

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} \text{ seu } f = x - \frac{ydx}{dy}, \text{ ex qua formula etiam}$$

non verus, tamen admodum propinquus radices f valor reperietur, qui deinceps denuo loco x substitutus, multo adhuc propiorem valorem pro f suppeditabit; sicque continuo propius ad verum radices f valorem accedetur.

230. Hinc igitur primum radices omnium dignitatum ex quibuscunque numeris extrahi possunt. Sit enim propositus numerus $x^n + b$ ex quo radicem potestatis n extrahi oporteat. Ponatur $x^n = a^n + b$ seu $x^n - a^n - b = 0$, ut sit $y = x^n - a^n - b$; erit

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}; \quad \frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3};$$

&c.

Kkk 2

Hinc

Hinc si radix quaesita ponatur $= f$, ut sit $f = \sqrt[n]{a^n + b}$ erit:
 $0 = x^n - a^n - b + n(f-x)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (f-x)^2 x^{n-2} + \&c.$

Si igitur pro x iam statuatur numerus ad valorem radice
 quaesitae f prope accedens, quod fiet ponendo $x = a$, si qui-
 dem b sit numerus tam parvus, ut $a^n + b < (a+1)^n$; erit
 $b = na^{n-1}(f-a)$ proxime, ideoque $f = a + \frac{b}{na^{n-1}}$, unde
 valor radiceis multo propius cognoscetur. Sin autem adhuc
 tertium terminum assumere velimus, ut sit

$$b = na^{n-1}(f-a) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} (f-a)^2; \text{ fiet}$$

$$(f-a)^2 = -\frac{2a}{n-1} (f-a) + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}, \text{ ideoque}$$

$$f = a - \frac{a}{n-1} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{(n-1)^2} + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}\right)} \text{ seu}$$

$$f = \frac{(n-2)a + \sqrt{aa + 2(n-1)b : na^{n-2}}}{n-1}$$

Quare ope extractionis radiceis quadratae valor radiceis f adhuc
 propius reperietur.

EXEMPLUM.

Quaeramus radicem quadratam ex numero quocunque c , seu
 sit $xx - c = y$.

Ponatur ergo numerus radicei proximus $= a$, & $b = c - aa$,
 ob $aa + b = c$, & quia est $n = 2$, fiet prior formula

$$f = a + \frac{c-aa}{2a} = \frac{c+aa}{2a}; \text{ altera vero dat } f = \sqrt{c}, \text{ quae est}$$

ipsa radix quaesita. Cum igitur sit proxime radix $= \frac{c+aa}{2a}$,

hic ipse valor pro a scribatur, eritque propius radix

$$f = \frac{cc + 6aac + aa^4}{4a(c+aa)}. \text{ Sit verbi gratia } c = 5; \text{ erit ex priori}$$

formula $f = \frac{5}{2^a} + \frac{a}{2}$. Ponatur ergo $a = 2$; erit $f = 2,25$; nunc ponatur $a = 2,25$; fiet $f = 2,236111$, statuatur porro $a = 2,236111$, erit $f = 2,2360679$, qui valor iam minime a vero discrepat.

231. Simili autem modo radix cuiuscunque aequationis inveniri potest proxime ope aequationis $f = x - \frac{y dx}{dy}$,

postquam scilicet pro x assumtus fuerit valor parum a quampiam aequationis radice discrepans. Ad huiusmodi vero valorem pro x inveniendum, substituuntur successive pro x varii valores, inter eosque is eligatur, qui functionis y minimum hoc est cyphrae proximum valorem indicat. Sic si sit $y = x^3 - 2xx + 3x - 4$,

$$\text{posito } x = 0 \text{ fit } y = -4$$

$$x = 1 \text{ . . . } y = -2$$

$$x = 2 \text{ . . . } y = +2$$

unde videmus radicem contineri inter valores 1 & 2, ipsius x .

Cum ergo sit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$, habebitur pro radice f aequationis $x^3 - 2xx + 3x - 4 = 0$ invenienda haec aequatio:

$$f = x - \frac{y dx}{dy} = x - \frac{x^3 - 2xx + 3x - 4}{3xx - 4x + 3}$$

Sit ergo $x = 1$; fiet $f = 1 + \frac{2}{2} = 2$. Nunc ponatur

$x = 2$, fiet $f = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$. Sit ergo $x = \frac{12}{7}$;

erit $f = \frac{12}{7} - \frac{104}{1701} = \frac{2812}{1701} = 1,653$. Si ulterius progredi velimus, logarithmis commodius utemur.

Ponatur ergo $x = 1,653$, eritque

lx

$$\begin{aligned}
 y &= y \\
 px &= Ap + Bp + Cp + Dp + Ep + \&c. \\
 \frac{1}{2}qx^2 &= \frac{1}{2}A^2q + ABq + ACq + ADq + \&c. \\
 &\quad + \frac{1}{2}BBq + BCq + \&c. \\
 \frac{1}{6}rx^3 &= \frac{1}{6}A^3r + \frac{1}{2}A^2Br + \frac{1}{2}A^2Cr + \&c. \\
 &\quad + \frac{1}{2}AB^2r + \&c. \\
 \frac{1}{24}sx^4 &= \frac{1}{24}A^4s + \frac{1}{8}A^3Bs + \&c. \\
 \frac{1}{120}tx^5 &= \frac{1}{120}A^5t + \&c.
 \end{aligned}$$

Unde obtinentur sequentes aequationes:

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{yyq}{2p^2}$$

$$C = -\frac{y^3qq}{2p^3} + \frac{y^3r}{6p^4}$$

$$D = -\frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5}$$

&c. ideoque erit:

$$z = -\frac{y}{p} - \frac{y^2q}{2p^2} - \frac{y^3qq}{2p^3} + \frac{y^3r}{6p^4} - \frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5} - \&c.$$

EXEMPLUM.

Sit proposita haec aequatio $x^5 + 2x - 2 = 0$.

Erit ergo $y = x^5 + 2x - 2$;

$$\frac{dy}{dx} = p = 5x^4 + 2 \quad ; \quad \frac{dp}{dx} = q = 20x^3 \quad ;$$

$$\frac{dq}{dx} = r = 60x^2 \quad ; \quad \frac{dr}{dx} = s = 120x \quad ; \quad \&c.$$

Ponatur autem nunc $x = 7$, quia hic valor parum a radice discrepat, erit:

$$y = 1 \quad ; \quad p = 7 \quad ; \quad q = 20 \quad ; \quad r = 60 \quad ; \quad s = 120. \quad \text{unde fiet:}$$

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^2} - \frac{200}{7^3} + \frac{10}{7^4} - \frac{5 \cdot 1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5}$$

seu

feu $z = \frac{1}{7} - \frac{10}{7^2} + \frac{130}{7^3} - \frac{1745}{7^4} + \&c.$ eritque ergo

$z = -0, 18,$ & radix $f = 0, 82,$ qui valor si denuo loco x substitueretur, prodiret radix maxime verae propinqua.

234. Invenimus ergo seriem infinitam, quae cuiusvis aequationis radicem exprimit: ea autem hoc laborat incommodo ut tum lex progressionis non pateat, tum ipsa nimis sit perplexa atque ad usum non satis accommodata. Alio igitur modo idem negotium suscipiamus, seriemque magis regularem investigemus, cuiuscunque aequationis propositae radicem exprimentem.

Sit ut ante proposita aequatio $y = 0,$ existente y functione quacunque ipsius x ; & quaestio huc redit, ut valor ipsius x definiatur, qui loco x substitutus functionem y reddat nihilo aequalem. Cum autem y sit functio ipsius $x,$ vicissim x tanquam functio spectari poterit ipsius $y,$ atque hac consideratione adhibita quaerendus est valor ipsius functionis $x,$ quem induit, cum quantitas y evanescit. Si igitur f ponatur designare istum ipsius x valorem, qui erit radix aequationis $y = 0,$ quoniam x abit in $f,$ si statuat $y = 0,$ erit per ea quae supra sunt demonstrata:

$$f = x - \frac{y dx}{dy} + \frac{y^2 ddx}{2dy^2} - \frac{y^3 d^3x}{6dy^3} + \frac{y^4 d^4x}{24dy^4} - \&c.$$

in qua aequatione statuitur differentiale dy constans. Si igitur ponatur: $\frac{dx}{dy} = p; \frac{dp}{dy} = q; \frac{dq}{dy} = r; \frac{dr}{dy} = s; \&c.$

erit his valoribus introductis, ut consideratio differentialis constantis exuatur:

$$f = x - py + \frac{1}{2} qy^2 - \frac{1}{6} ry^3 + \frac{1}{24} sy^4 - \frac{1}{120} ty^5 + \&c.$$

235. Tributo ergo ipse x quocunque valore, simul valores ipsius $y,$ atque quantitatum $p, q, r, s, \&c.$ determinabuntur; hisque inventis habebitur series infinita valorem radices f ex-

f exprimens. Sin autem aequatio $y = 0$ plures admittat radices, tum eae prodibunt, si pro x diversi valores assumantur: quia enim y eundem valorem induere potest, etiamsi ipsi x diversi valores tribuantur, mirum non est eandem feriem saepenumero plures valores suppeditare posse. Quo igitur hiis casibus ambiguitas tollatur, simulque series convergens reddatur, pro x assumi debet valor iam prope ad valorem eius radices, quae quaeritur, accedens. Hoc enim modo valor ipsius y fiet admodum parvus, serieique termini vehementer decrescent, ita ut paucis terminis sumendis iam satis iustus valor pro f inveniatur. Hic igitur valor si deinceps loco x substituatur, quantitas y multo minor evadet, seriesque multo magis converget; hocque modo statim radix f tam exacte innotescet, ut error futurus sit minimus. Hincque summa huius expressionis praerogativa prae ea, quam ante elicueramus, manifesto perspicitur.

236. Ponamus extrahendam esse radicem potestatis n ex numero quocunque N . Sumta igitur proxima potestate exponentis n , numerus propositus facile resolvetur in hanc formam $N = a^n + b$. Erit ergo

$$x^n = a^n + b \quad \& \quad y = x^n - a^n - b; \quad \text{unde fit:}$$

$$dy = nx^{n-1} dx; \quad \& \quad \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{nx^{n-1}}$$

$$dp = -\frac{(n-1)dx}{nx^n}; \quad \& \quad \frac{dp}{dy} = q = -\frac{n-1}{n^n x^{2n-1}}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{n^n x^{2n}}; \quad \& \quad \frac{dq}{dy} = r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3 x^{3n-1}}$$

$$dr = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx}{n^3 x^{3n}}; \quad \& \quad s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4 x^{4n-1}}$$

Sec.

Ponatur nunc $x = a$, eritque $y = -b$, atque radix quaerita

$f = \sqrt[n]{a^n + b}$ hoc modo exprimetur:

LII

$f =$

CAPUT IX.

$$f = a + \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{n \cdot 2n \cdot a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n \cdot a^{4n-1}} + \&c.$$

ficque prodit eadem series, quae vulgo per evolutionem binomii $(a^n + b)^{\frac{1}{n}}$ erui solet.

237. Postquam ergo in actuali extractione radix proximae vera a fuerit inventa, simulque residuum b fuerit reperi- tum, tum ad radicem insuper addi oportet valor fractionis $\frac{b}{na^{n-1}}$ quo propius vera radix obtineatur. Erit autem

$$a^{n-1} = \frac{N - b}{a}, \text{ ob } N = a^n + b. \text{ At vero hoc modo}$$

radix iusto maior inveniatur, quoniam tertius terminus subtrahi debet. Quo igitur per divisionem residui b radix multo propius ad verum accedens inveniatur idoneus divisor debet investigari, qui fingatur esse $na^{n-1} + ab + 6bb + 7b^3 + \&c.$ Cum igitur debeat esse:

$$\begin{array}{r} \frac{b}{na^{n-1} + ab + 6bb + 7b^3 + \&c.} = \\ \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{2n^2 a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^3 a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^4 a^{4n-1}} + \&c. \\ \text{fiet multiplicatione per } na^{n-1} + ab + 6bb + 7b^3 + \&c. \text{ in-} \\ \text{stituta:} \\ \frac{(n-1)bb}{2na^n} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2 a^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^3 a^{3n}} + \&c. \\ + \frac{ab^2}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)ab^3}{2n^2 a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)ab^4}{6n^3 a^{3n-1}} \\ + \frac{6b^3}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)6b^4}{2n^2 a^{2n-1}} \\ \frac{7b^4}{na^{n-1}} \end{array}$$

Hinc deducantur sequentes determinaciones:

$$a = \frac{n-1}{2a}$$

$$b = \frac{(n-1)a}{2na^n} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6na^{n+1}} = \frac{(n-1)(n+1)}{12na^{n+1}}$$

$$c = \frac{(n-1)b}{2na^n} = \frac{(n-1)(2n-1)a}{6nna^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^2a^{2n+1}}$$

$$\text{feu } c = \frac{(n-1)(n+1)}{24na^{2n+1}}$$

Fractio ergo ad radicem iam inventam a insuper addenda erit:

$$\frac{b}{na^{n-1} + \frac{(n-1)b}{2a} + \frac{(n-1)bb}{12na^{n+1}} + \frac{(n-1)b^3}{24na^{2n+1}}}$$

238. Quod si ergo radix quadrata extrahi debeat ex numero N , atque inventa iam sit radix proxima $= a$, cum residuo $= b$, ad radicem inventam insuper addi debet quotus, qui oritur, si residuum b dividatur per

$$2a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} - \&c.$$

Sin autem radix cubica extrahi debeat, tum residuum b dividi debet per $3a^2 + \frac{b}{a} - \frac{2bb}{9a^4} + \frac{b^3}{9a^7} - \&c.$ quarum formularum usum in his exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Extrahatur radix quadrata ex numero 200.

Ponatur $N = 200$, & cum proximum quadratum sit 196, erit $a = 14$, & residuum $b = 4$, quod propterea dividi

debet per $28 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{196} + \frac{1}{7 \cdot 196 \cdot 98}$, eritque ergo

divisor $= 28, 142135$, per quem si 4 dividatur, obtinebitur fractio decimalis ad 14 addenda, quae iusta erit ad 10 figuras & ultra.

EXEMPLUM II.

Extrahatur radix cubica ex numero $N = 10$.
Proximus cubus est 8, & residuum = 2, unde $a = 2$

& $b = 2$, atque divisor = $12 + 1 - \frac{1}{18} = 12,9444$.

Quare radix cubica quaesita erit proxime =

$$2 \frac{2}{12,9444} = 2 \frac{10000}{64722}$$

239. Series pro radice inventa etiam considerari potest tanquam recurrens orta ex quapiam fractione, hoc enim modo plures termini seriei ad multo pauciores, qui numeratorem & denominatorem fractionis constituent, revocabuntur. Sic levi attentione adhibita perspicietur fore proxime:

$$(a+b)^n = a^n \frac{a + \frac{n+1}{2}b}{a - \frac{n-1}{2}b} \quad \text{atque adhuc propius}$$

$$(a+b)^n = a^n \frac{aa + \frac{n+2}{2}ab + \frac{(n+1)(n+2)}{12}bb}{aa - \frac{n-2}{2}ab + \frac{(n-1)(n-2)}{12}bb}$$

Simili modo plures terminos introducendo fractiones adhuc accuratiores obtineri possunt:

$$a^3 + \frac{n+3}{2}a^2b + \frac{(n+3)(n+2)}{10}ab^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{120}b^3$$

$$a^3 - \frac{n-3}{2}a^2b + \frac{(n-3)(n-2)}{10}ab^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{120}b^3$$

Quin etiam huiusmodi forma generalis exhiberi potest, ad quam commode exprimendam fit:

A =

| | |
|--------------------------------------|--|
| $A = \frac{m(n+m)}{1, 2m}$ | $\mathcal{A} = \frac{m(n-m)}{1, 2m}$ |
| $B = \frac{(m-1)(n+m-1)}{2(2m-1)} A$ | $\mathcal{B} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{2(2m-1)} \mathcal{A}$ |
| $C = \frac{(m-2)(n+m-2)}{3(2m-2)} B$ | $\mathcal{C} = \frac{(m-2)(n-m+2)}{3(2m-2)} \mathcal{B}$ |
| $D = \frac{(m-3)(n+m-3)}{4(2m-3)} C$ | $\mathcal{D} = \frac{(m-3)(n-m+3)}{4(2m-3)} \mathcal{C}$ |
| &c. | &c. |

His autem valoribus determinatis erit:

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + \&c.}{a^m - \mathcal{A}a^{m-1}b + \mathcal{B}a^{m-2}b^2 - \mathcal{C}a^{m-3}b^3 + \&c.}$$

240. Si igitur hic pro n substituatur numerus fractus, istae formulae ad extractionem radicum apprime erunt accommodatae. Sic si radix quaecunque potestatis n extrahi debeat ex forma $a^n + b$, sequentes formulae in usum vocari possunt:

$$(a+b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{2na^n + (n+1)b}{2na^n + (n-1)b}$$

$$(a+b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{12n^2 a^{2n} + 6n(2n+1)a^n b + (2n+1)(n+1)bb}{12n^2 a^{2n} + 6n(2n-1)a^n b + (2n-1)(n-1)bb}$$

Sin autem ponatur $a^n + b = N$, ut fit $a^n = N - b$; erit

$$(a+b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{2nN - (n-1)b}{2nN - (n+1)b}$$

$$(a+b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{12n^2 N^2 - 6n(2n-1)Nb + (2n-1)(n-1)bb}{12n^2 N^2 - 6n(2n+1)Nb + (2n+1)(n+1)bb}$$

241. Formula igitur generalis pro radice cuiusque aequationis invenienda in aequationibus, quae ex pluribus terminis constant; eundem praestat usum, quem solita regula binomii ad resolutionem aequationum purarum $x^n = c$ afferre solet, atque adeo hoc casu in regulam illam ipsam abit.

Sin

CAPUT IX.

Sin autem aequatio fuerit affecta vel etiam transcendens, expressio nostra generalis semper aequali successu in usum vocatur, seriemque praebet infinitam, quae valorem radice exhibet. Quamobrem cum in hoc negotio summa vis istius formulae generalis consistat, eius usum hic aliquanto fusius ostendamus. Sit igitur proposita haec aequatio affecta tribus terminis constans:

$$x^n + cx = N,$$

denotantibus c & N quantitates quascunque datas. Ponatur $x^n + cx - N = y$, erit $dy = (nx^{n-1} + c) dx$,

hincque fiet $p = \frac{1}{nx^{n-1} + c}$, tum est

$$dp = -\frac{n(n-1)x^{n-2} dx}{(nx^{n-1} + c)^2}; \quad \& \quad q = -\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(nx^{n-1} + c)^3}.$$

Simili modo ob $r = \frac{dq}{dy}$; $s = \frac{dr}{dy}$; &c. reperietur:

$$r = \frac{n^2(n-1)(2n-1)x^{2n-4} - n(n-1)(n-2)cx^{n-3}}{(nx^{n-1} + c)^5}$$

$$s = \frac{n^3(n-1)(2n-1)(3n-1)x^{3n-6} + 4n^2(n-1)(n-2)(2n-1)cx^{2n-5} - n(n-1)(n-2)(n-3)c^2x^{n-4}}{(nx^{n-1} + c)^7}$$

$$t = + \frac{n^4(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)x^{4n-8} - n^3(n-1)(n-2)(2n-1)(2n-1)cx^{3n-7} - n^2(n-1)(n-2)(2n-1)(n-2)c^2x^{2n-6} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)c^3x^{n-5}}{(nx^{n-1} + c)^9} \quad \&c.$$

Quibus valoribus inventis, erit aequationis propositae radix

$$f = x - py + \frac{1}{2} qyy - \frac{1}{6} ryy^3 + \frac{1}{24} sy^4 - \frac{1}{120} ty^5 + \&c.$$

quicquid enim pro x substituatur, unde simul litterae y , p , q , r , &c. valores determinatos induunt, summa seriei aequabitur valori unius radice.

E X E M P L U M I.

Sit proposita haec aequatio $x^3 + 2x = 2$.
Erit $c = 2$, $N = 2$, & $n = 3$, atque $y = x^3 + 2x - 2$.
Po.

Ponatur $x = 1$, erit $y = 1$, & $p = \frac{1}{5}$; $q = -\frac{6}{5^3}$; $r = \frac{78}{5^5}$;

$s = -\frac{16.90}{5^7}$ &c. atque aequationis radix erit:

$$f = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5^3} - \frac{13}{5^5} - \frac{60}{5^7} - \text{&c.} = 0,771072.$$

Ponatur nunc $x = 0,77$, & quia est $y = x^3 + 2x - 2$;

$p = \frac{1}{3xx + 2}$; $q = -6p^3x$; $r = 90xpx^5 - 12p^5$; atque

$s = -2160p^7x^3 + 720p^7x$; habebitur logarithmis adhibendis:

| | |
|--------------------|------------------|
| $lx = 9,8864907$ | $x = 0,77$ |
| $lx^2 = 9,7729814$ | $x^2 = 0,5929$ |
| $lx^3 = 9,6594721$ | $x^3 = 0,456533$ |
| | $2x = 1,54$ |

$$x^3 + 2x = 1,996533$$

Ergo $y = -0,003467$

| | |
|--------------------|--------------------------|
| $l-y = 7,5399538$ | $3xx + 2 = 3,7787$ |
| $lp = 9,4226575$ | $l(3xx + 2) = 0,5773424$ |
| $l-py = 5,9626113$ | $-py = 0,000917511$ |

$$lp^3 = 8,2679725$$

$$lx = 9,8864907$$

$$l_3 = 0,4771213$$

$$ly^2 = 5,0799076$$

$$l-\frac{1}{2}qyy = 3,7114922 \quad -\frac{1}{2}qyy = 0,00000514.$$

Ergo radix $f = 0,770916997$, quae vix in ultima figurâ a vero aberrabit.

EXEMPLUM II.

Sit proposita aequatio $x^4 - 2xx + 4x = 8$.

Ponatur $y = x^4 - 2xx + 4x - 8$, erit $dy = 4dx(x^3 - x + 1)$

$$p = \frac{1}{4(x^3 - x + 1)}; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{-3xx + 1}{4(x^3 - x + 1)^2} \quad \text{Ergo}$$

$$q = \frac{-3xx + 1}{16(x^3 - x + 1)^3}; \quad \frac{dq}{dx} = \frac{21x^4 - 12xx - 6x + 3}{16(x^3 - x + 1)^4}$$

$$\& \quad r = \frac{21x^4 - 12xx - 6x + 3}{64(x^3 - x + 1)^5}; \quad \&c.$$

ex quibus erit radix aequationis propositae:

$$f = x - \frac{y}{4(x^3 - x + 1)} - \frac{(3xx - 1)yy}{32(x^3 - x + 1)^3} - \frac{(7x^4 - 4xx - 2x + 1)y^3}{128(x^3 - x + 1)^5} - \&c.$$

Opus est ergo ipsi x idoneum valorem tribui, quo series ista fiat convergens. Primum autem perspicuum est, si ipsi x tribueretur talis valor, quo fieret $x^3 - x + 1 = 0$, tum omnes seriei terminos praeter primum evadere infinitos, neque adeo exinde quicquam concludi posse. Convenit ergo ipsi x eiusmodi valorem assignare, quo $\& y$ fiat exiguum $\& x^3 - x + 1$ non admodum parvum. Sit $x = 1$, erit $y = -5$, $\&$

$$f = 1 + \frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64} - \&c. \text{ ubi cum tres termini } \frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64}$$

congruant cum progressionem geometrica, cuius summa est $\frac{5}{9}$

$$\text{erit circiter } f = \frac{14}{9}. \text{ Statuamus ergo } x = \frac{3}{2}, \text{ erit } y = -\frac{23}{16};$$

$$\& x^3 - x + 1 = \frac{23}{8}, \text{ unde fit:}$$

$$f = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} + \frac{391}{256 \cdot 529} - \&c. = 1,61.$$

Ponatur nunc $x = 1,61$; erit:

| | | |
|--------------------|------------------|-------------------------------|
| $lx = 0,2068259$ | $x = 1,61$ | $\text{fit } x^3 - x + 1 = x$ |
| $lx^2 = 0,4136518$ | $x^2 = 2,5921$ | |
| $lx^3 = 0,6204777$ | $x^3 = 4,173281$ | |
| $lx^4 = 0,8273036$ | $x^4 = 6,718983$ | hinc |
| $ly = 8,4016934$ | $y = -0,025217$ | |
| $lz = 0,5518502$ | $z = 3,563281$ | |
| $ly/z = 7,8498432$ | | |

l4 =

| | |
|-----------------------------|--|
| $l4 = 0,6020600$ | $\frac{-y}{4z} = 0,0017692$ |
| $\frac{-y}{4z} = 7,2477832$ | $3xz - 1 = 6,7763$ |
| $l(3xz - 1) = 0,8309926$ | |
| $ly^2 = 6,8033868$ | |
| $7,6343794$ | |
| $lz^3 = 1,6555506$ | |
| $5,9788283$ | |
| $l3z = 1,5051500$ | $\frac{(3xz - 1)y^2}{32z^3} = 0,000002976$ |
| $4,4736788$ | |

Ergo $f = 1,6117662$.

242. Methodus haec inveniendi radices aequationum proxime aequae patet ad quantitates transcendentis. Quaeramus numerum x , cuius logarithmus ex quocunque canone desumptus ad ipsum numerum datam habeat rationem ut 1 ad n , atque habebitur ista aequatio $x - n l x = 0$: fit autem k modulus horum logarithmorum, ita ut isti logarithmi obtineantur, si logarithmi hyperbolici multiplicentur

per k , erit $d l x = \frac{k dx}{x}$. Ponatur ergo $x - n l x = y$, fitque

f valor ipsius x quaesitus, qui reddat $x = n l x$. Cum igitur sit

$$y = x - n l x, \text{ erit } dy = dx - \frac{k n dx}{x} = \frac{dx(x - kn)}{x} \quad \&$$

$$\frac{dx}{dy} = p = \frac{x}{x - kn}; \text{ unde } dp = - \frac{k n dx}{(x - kn)^2} \text{ ergo}$$

$$\frac{dp}{dy} = q = \frac{-k n x}{(x - kn)^3}; \quad dq = \frac{2knx dx + k^2 n^2 dx}{(x - kn)^4}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{k n x (2x + kn)}{(x - kn)^5}; \quad \&c. \quad \text{Quare fiet:}$$

$$f = x - \frac{n y}{x - kn} - \frac{k n x y^2}{2(x - kn)^3} - \frac{k n x y^3 (2x + kn)}{6(x - kn)^5} - \&c.$$

M m m

In-

CAPUT IX.

Infra autem ostendemus hoc problema solutionem non admittere, nisi sit $kn > e$, existente e numero cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, seu debet esse $kn > 2,7182818$.

E X E M P L U M.

Quaeratur numerus praeter 10, cuius logarithmus tabularis aequetur decimae parti ipsius numeri:

Quia de logarithmis tabularibus quaestio instituitur, erit
 $k = 0,43429448190325$, atque ob $n = 10$ habebitur
 $kn = 4,3429448190325$. Facto iam $n = 1$, erit $y = 1$,

fietque $f = 1 + \frac{1}{3,3429} + \frac{2,1714724}{(3,3429)^3} - \&c.$

sicque proxime erit $f = 1,37$. Statuatur ergo $n = 1,37$,
 erit $ln = 0,136720567156406$, & ob $y = n = 1,37$,
 erit $y = 0,00279432843503$. &

$-n + kn = 2,9729448190325$. Eiat ergo

$ln = 0,1367205$

$ly = 7,4462773$

$7,5829978$

$l(kn - n) = 0,4731866$
 $7,1098112$

$\frac{-ny}{n - kn} = 0,00128769$

Deinde cum sit tertius terminus $\frac{kny}{2(n - kn)^3} = \frac{kny}{2(n - kn)^2} \cdot \frac{ny}{n - kn}$

erit: $l \frac{-ny}{n - kn} = 7,1098112$

$ly = 7,4462773$

$lkn = 0,6377842$

$5,1938727$

$l(kn - n)^2 = 0,9463732$

$4,2474995$

$l_2 = 0,3010300$

$l \text{ tert. term.} = 3,9464695$

I. term. $n = 1,37$

II.

II. term. = 0,00128769

III. term. = 0,00000088

$f = 1,37128857$

$lf = 0,137128857.$

243. Si aequatio fuerit exponentialis, ea ad logarithmicam reduci poterit; ita si quaeratur valor ipsius x , ut fit $x^x = a$, erit $x \ln x = \ln a$. Quare posito $y = x \ln x - \ln a$, fiet

$dy = d \ln x + dx$, & $\frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{1 + \ln x}$ Tumque

$dp = \frac{-dx}{x(1 + \ln x)^2}$; & $\frac{dp}{dy} = q = \frac{-1}{x(1 + \ln x)^3}$,

$dq = \frac{dx}{xx(1 + \ln x)^3} + \frac{3dx}{xx(1 + \ln x)^4}$, ideoque

$\frac{dq}{dy} = r = \frac{1}{xx(1 + \ln x)^4} + \frac{3}{xx(1 + \ln x)^5}$; porro erit

$dr = \frac{-2dx}{x^3(1 + \ln x)^4} - \frac{10dx}{x^3(1 + \ln x)^5} - \frac{15dx}{x^3(1 + \ln x)^6}$; ergo

$s = \frac{-2}{x^3(1 + \ln x)^5} - \frac{10}{x^3(1 + \ln x)^6} - \frac{15}{x^3(1 + \ln x)^7}$, &

$t = \frac{6}{x^4(1 + \ln x)^6} + \frac{40}{x^4(1 + \ln x)^7} + \frac{105}{x^4(1 + \ln x)^8} + \frac{105}{x^4(1 + \ln x)^9}$

$u = \frac{-24}{x^5(1 + \ln x)^7} - \frac{196}{x^5(1 + \ln x)^8} - \frac{700}{x^5(1 + \ln x)^9} - \frac{1260}{x^5(1 + \ln x)^{10}} - \frac{945}{x^5(1 + \ln x)^{11}}$.

Hinc ergo si verus valor ipsius x fit $= f$, ita ut fit $f^f = a$; erit:

$f = x - \frac{y}{1 + \ln x} - \frac{yy}{2x(1 + \ln x)^2} - \frac{y^3}{2xx(1 + \ln x)^3} - \frac{5y^4}{8x^3(1 + \ln x)^4} - \frac{7y^5}{8x^4(1 + \ln x)^5}$
 $- \frac{y^3}{6x^2(1 + \ln x)^4} - \frac{5y^4}{12x^3(1 + \ln x)^5} - \frac{7y^5}{8x^4(1 + \ln x)^6}$

$$\frac{y^4}{12x^3(1+lx)^5} - \frac{y^5}{3x^4(1+lx)^7} + \frac{y^5}{20x^4(1+lx)^6}$$

&c.

Haec ergo expressio in infinitum continuata, quicumque valor pro x statuatur, sumto $y = xlx - la$ verum ipsius f dabit valorem. Sic si ponatur $x = 1$, erit $y = -la$, &

$$f = 1 + la - \frac{(la)^2}{2} + \frac{2(la)^3}{3} - \frac{9(la)^4}{8} + \frac{32(la)^5}{15} - \frac{625(la)^6}{144} - \&c.$$

ubi notandum est esse la logarithmum hyperbolicum ipsius a .

E X E M P L U M.

Quaeratur numerus f , ut sit $f^f = 100$.

Cum sit $a = 100$, & $y = xlx - la = xlx - l100$, quia patet esse $f > 3$ & < 4 , statuatur

$$x = \frac{7}{2}; \text{ eritque } lx = 1,25276296849$$

$$xlx = 4,38467038972$$

$$l100 = 4,60517018599$$

$$y = -0,22049975627$$

$$1 + lx = 2,25276296849$$

Hinc erit logarithmis vulgaribus adhibendis:

$$l-y = 9,3434083$$

$$l(1+lx) = 0,3527156$$

$$\frac{8,9906927}{1+lx} = 0,0978797$$

$$ly^2 = 8,6868166$$

$$3l(1+lx) = 1,0581468$$

$$= 7,6286698$$

$$l2x = l7 = 0,8450980$$

$$\frac{6,7835718}{2x(1+lx)^2} = 0,0006075$$

Ergo proxime erit $f = 3,5972722$, sequentibus vero insuper terminis sumtis erit $f = 3,5972852$.

244. Praeterea autem calculus differentialis insignem habet

bet usum in resolutione aequationum, si quaepiam relatio, quae inter radices intercedit, fuerit cognita. Sit proposita aequatio $y = 0$, in qua sit y functio quaecunque ipsius x . Si iam verbi gratia constet, duas huius aequationis radices inter se differre quantitate data a haec duae radices facile invenientur sequenti modo. Denotet x harum duarum radicum minorem, erit maior $= x + a$, quare cum functio y evanescat, si x significet unam ex radicibus aequationis $y = 0$, evanescet quoque y , si loco x ponatur $x + a$. Quocirca erit:

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

Unde cum sit $y = 0$ erit quoque

$$0 = \frac{dy}{dx} + \frac{addy}{2dx^2} + \frac{a^2 d^3y}{6dx^3} + \frac{a^3 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

quae duae aequationes simul sumtae per methodum eliminationis dabunt valorem illius radice x , quam alia radix superat quantitate a .

E X E M P L U M.

Sit proposita haec aequatio

$$x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0,$$

quam undecunque constet, habere duas radices unitate differentes.

Posito $y = x^5 - 24x^3 + 49xx - 36$ erit:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 72x^2 + 98x$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 72x + 49$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = 10x^2 - 24$$

$$\frac{d^4y}{24dx^4} = 5x$$

$$\frac{d^5y}{120dx^5} = 1$$

Iam ob $a = 1$ erit:

A

A . . . $5x^4 + 10x^3 - 62x^2 + 31x + 26 = 0$. Ar est

B . . . $x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0$.

Multiplicetur superior per x & inferior per 5, alteraque ab altera subtracta relinquet :

$10x^4 + 58x^3 - 214x^2 + 26x + 180 = 0$ feu

C . . . $5x^4 + 29x^3 - 107x^2 + 13x + 90 = 0$

a qua prima A subtracta relinquet :

D . . . $19x^3 - 45x^2 - 18x + 64 = 0$

D. 5x . . . $95x^4 - 225x^3 - 90x^2 + 320x = 0$

A. 19 . . . $95x^4 + 190x^3 - 1178x^2 + 589x + 494 = 0$

E $415x^3 - 1088x^2 + 269x + 494 = 0$

D. 415 $7885x^3 - 18675x^2 - 7470x + 26560 = 0$

E. 19 $7885x^3 - 20672x^2 + 5111x + 9386 = 0$

F $1997x^2 - 12581x + 17174 = 0$

D. 247 $4693x^3 - 11115x^2 - 4446x + 15808 = 0$

E. 32 $13280x^3 - 34816x^2 + 8608x + 15808 = 0$

$8587x^3 - 23701x^2 + 13054x = 0$

G $8587x^2 - 23701x + 13054 = 0$

F. 8587 $17148239x^2 - 108033047x + 147473138 = 0$

G. 1997 $17148239x^2 - 47330897x + 26068838 = 0$

$60702150x - 121404300 = 0$

Ex qua aequatione sequitur $x = 2$,
ac propterea quoque radix aequationis erit $x = 3$, quorum
uterque valor aequationis satisfacit.

245. Potest autem haec operatio absolvi sine subsidio
calculi differentialis, propterea quod eadem aequatio, quam
calculus differentialis suppeditavit, prodit si in ipsa aequatio-
ne proposita ponatur $x + a$ loco x . Ceterum vero haec
methodus eliminandi nimium est operosa, & si aequationes
essent altioris gradus, labor penitus foret insuperabilis; ex
quo multo minus in aequationibus transcendentibus locum
habere potest. Quod si autem ponamus duas aequationis pro-
positae $y = 0$ radices inter se esse aequales, tum ob $a = 0$,
aequa-

pe
E
ru
pe
qua
erit
tur
trip
ful
Cum
praec
tica
tam
nemp
dimen
" +
quae
" -
Scilicet
aequatic
multipl

aequatio differentialis abit in hanc $\frac{dy}{dx} = 0$. Quoties ergo quae-
piam aequatio $y = 0$ habuerit duas radices aequales, toties
erit $\frac{dy}{dx} = 0$; atque hae duae aequationes coniunctae praebunt
eum ipsius x valorem, cui binae radices sunt aequales. Un-
de vicissim si ambae aequationes $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ commu-
nem habeant radicem, ea erit radix duplex aequationis $y = 0$.
Evenit autem hoc, si postquam quantitas x ope duarum ista-
rum aequationum $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ penitus fuerit eliminata,
perveniat ad aequationem identicam. Sic si proponatur ae-
quatio:

$$x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$$

erit quoque $3xx - 4x - 4 = 0$, cuius duplum ad eam addi-
tum dat $x^3 + 4xx - 12x = 0$ seu $xx + 4x - 12 = 0$ cuius
tripulum est $3xx + 12x - 36 = 0$

subtrahatur $3xx - 4x - 4 = 0$

$$\hline 16x - 32 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

Cum ergo prodierit $x = 2$, substituatur hic valor in una
praecedentium $3xx - 4x - 4 = 0$, & prodibit aequatio iden-
tica $12 - 8 - 4 = 0$, unde colligitur aequationem propo-
sitam $x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$ duas habere radices aequales;
nempe 2.

246. Si igitur habeatur aequatio algebraica quotcumque
dimensionum:

$$x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + D x^{n-4} + \&c. = 0$$

quae duas habeat radices inter se aequales, erit quoque

$$n x^{n-1} + (n-1) A x^{n-2} + (n-2) B x^{n-3} + (n-3) C x^{n-4} + (n-4) D x^{n-5} + \&c. = 0.$$

Scilicet illius aequationis radix duplex simul erit radix istius
aequationis. Multiplicetur illa per x , ab eaque haec per x
multiplicata subtrahatur, prodibitque haec nova aequatio:

$Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} + 4Dx^{n-4} + \&c. = 0$. Nunc addantur prima per a & haec per b multiplicatae erit: $ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \&c. = 0$ quae aequatio cum ipsa proposita coniuncta monstrabit radices aequales, si quas habet proposita. Cum igitur quantitates a & b pro lubitu assumi queant, coefficientes a , $a+b$, $a+2b$, &c. progressionem quamcunque arithmetica repraesentant. Quamobrem si aequatio quaecunque habeat duas radices aequales, eae inveniuntur, si singuli aequationis propositae termini multiplicentur per terminos cuiusvis progressionis arithmeticae respective; nova enim aequatio hoc modo resultans eam radicem, quae in proposita bis inest, quoque continebit. Sic aequatio:

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$ si eius termini multiplicentur per progressionem arithmetica hanc: a ; $a+b$; $a+2b$; $a+3b$; $a+4b$; &c. prodibit nova aequatio haec:

$ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \&c. = 0$ quae cum illa coniuncta radices aequales ostendet. Haecque est regula satis cognita inveniendi radices aequales cuiuscunque aequationis.

247. Si aequatio $y = 0$ tres habeat radices aequales non solum erit $\frac{dy}{dx} = 0$, sed etiam erit $\frac{ddy}{dx^2} = 0$; si quidem pro x statuatur eius radice valor, quae in aequatione $y = 0$ ter inest. Ad hoc ostendendum ponamus aequationem $y = 0$ tres habere radices huiusmodi x , $x+a$, & $x+b$, quae primum intervallis finitis a & b a se invicem discrepent; & quia y evanescit, si loco x tam $x+a$, quam $x+b$ scribatur, erit:

$$y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{a^4 d^4y}{24dx^4} + \&c. = 0$$

$$y + \frac{bdy}{dx} + \frac{b^2 ddy}{2dx^2} + \frac{b^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{b^4 d^4y}{24dx^4} + \&c. = 0$$

a qui...

quibus binis posterioribus si prima subtrahatur erit:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{addy}{2dx^2} + \frac{a^2 d^3 y}{6dx^3} + \frac{a^3 d^4 y}{24dx^4} + \&c. = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{bddy}{2dx^2} + \frac{b^2 d^3 y}{6dx^3} + \frac{b^3 d^4 y}{24dx^4} + \&c. = 0$$

Subtrahantur quoque hae a se invicem, divisioneque per $a - b$ facta erit:

$$\frac{ddy}{2dx^2} + \frac{(a+b)d^3 y}{6dx^3} + \frac{(aa+ab+bb)d^4 y}{24dx^4} + \&c. = 0.$$

Ponatur iam $a = 0$ & $b = 0$, ita ut tres illae radices inter se sint aequales, eritque ob terminos evanescentes:

$$y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0; \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = 0.$$

248. Quoties ergo aequatio $y = 0$, tres habeat radices aequales puta f, f, f , tum ista quantitas f erit quoque radix non solum huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, sed etiam huius

$\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Hinc manifestum est, cum f sit radix communis

aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, & eius differentialis $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, eam in

aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$, bis inesse debere, per ea quae ante de

binis radicibus aequalibus ostendimus. Quare si aequatio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$$

tres contineat radices aequales f, f, f , si eius termini per terminos progressionis arithmeticae cuiusvis multiplicentur, tum aequatio resultans binas habebit radices aequales f & f : quamobrem ea denuo per progressionem arithmeticam quamcunque multiplicari poterit, ut prodeat aequatio eandem radicem f semel complectens. Obtinebuntur ergo tres aequationes communem radicem f habentes, ex quarum combina-

N n n

tione

tione haec ipsa radix facile elicietur. Si enim eiusmodi progressionem arithmeticae eligantur, quarum vel primus vel ultimus terminus sit $= 0$, tum aequatio prodibit uno gradu inferior, sicque eliminatio eo facilius evadet.

249. Simili modo ostendetur, si aequatio $y = 0$ quatuor habeat radices aequales f, f, f, f , tum posito $x = f$ non solum fieri $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, & $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, sed etiam fore,

$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Scilicet uti aequatio $y = 0$ quater continet radicem $x = f$; ita aequatio $\frac{dy}{dx}$ eandem radicem ter; aequatio

vero $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ bis, & aequatio $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ semel complectetur.

Hoc quoque facilius perspicietur, si perpendamus functionem y hoc casu huiusmodi formam $(x-f)^4 X$ habere debere, denotante X functionem quamcumque ipsius x . Hac forma assumpta erit:

$\frac{dy}{dx} = (x-f)^3 \left(4X + \frac{(x-f)dX}{dx} \right)$, ideoque per $(x-f)^3$

divisibilis. Similiter porro habebit $\frac{d^2y}{dx^2}$ factorum $(x-f)^2$,

& $\frac{d^3y}{dx^3}$ factorem $x-f$; ex quo perspicuum est, si radix

$x = f$ in aequatione $y = 0$ quater infit, eam in aequatione

$\frac{dy}{dx} = 0$ ter, in aequatione $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ bis, atque in $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$

semel adhuc inesse debere.