SUR UNE CONTRADICTION APPARENTE DANS LA DOCTRINE DES LIGNES COURBES.

PAR M. EULER.

I.

On croit généralement que la Geometrie ſe diſtingue des autres ſciences, parce que tout qu'on y avance eſt fondé ſur des démonſtrations les plus rigoureuſes, & qu'il ne s'y trouve rien, qui puiſſe donner occaſion à des controverſes. En effet, puiſque dans la Geometrie on n'admet d'autres propoſitions, que celles qui ſont parfaitement démontrées, on ne ſauroit comprendre, comment on pourroit tomber en diſpute. Encore moins ſera-t-il poſſible, que deux propoſitions ſolidement prouvées ſoient en contradiction entr'elles, vu que les verités, bien loin d'être contraires, ſe trouvent toujours dans la plus parfaite harmonie entr'elles. Et quoiqu'il arrive ſouvent dans les autres ſciences, que deux verités ſe paroiſſent contredire, on eſt pourtant bien aſſuré, que ce n'eſt qu'une contradiction apparente, qui tire pour la plus part ſon origine des idées moins preciſes, ou du deffaut d'une connoiſſance ſuffiſante des choſes, auxquelles il faut avoir égard. Par cette raiſon on ſera d'autant plus porté à croire, que dans la Geometrie de pareilles contradictions apparentes ne trouvent aucun lieu, puiſqu'on eſt bien eloigné de ſe contenter des idées vagues, & non ſuffiſamment déterminées.

II. Neanmoins je m'en vai mettre devant les yeux deux propoſitions de la Geometrie, dont toutes les deux ſont rigoureuſement démontrées, qui paroiſſent conduire à une contradiction ouverte. Cette difficulté ſe rencontre dans la doctrine des lignes courbes, où pour les lignes courbes d'un certain ordre on ſait combien de points il en faut pour la détermination. Ainſi une ligne du troiſieme ordre peut être décrite par 9 points donnés, ou 9 points déterminent tellement une ligne du troiſieme ordre, qu'il n'y a qu'elle ſeule qui puiſſe être tirée par ces neuf points. Mais il eſt auſſi demontré que deux lignes du 3^{me} ordre ſe peuvent couper en neuf points ; donc, il peut arriver que deux lignes du troiſieme ordre paſſent par neuf points donnés, d'où il s'enſuit que neuf points ne ſont pas ſuffiſants pour déterminer une ligne du 3^{me} ordre, ce qui eſt contraire à ce qu'on vient d'avancer. Avant que d'expliquer & de déveloper cette contradiction apparente, il ſera convenable de la mettre dans tout ſon jour, pour en mieux faire ſentir l'importance. Pour cet effet je commencerai par l'explication de ces deux propoſitions mêmes, qui ſemblent renfermer cette contradiction.

Propoſ. I. III. Comme une ligne du premier ordre, ou une droite, ſe peut tirer par deux points donnés quelconques, ainſi une ligne du ſecond ordre, ou ſection conique, ſera tirée par 5 points, une ligne du troiſieme ordre par 9 points, une du quatrieme ordre par 14 points, & en général une ligne de l'ordre indiqué par le nombre n, pourra être tirée par $\frac{nn+3n}{2}$ points. Car l'equation générale des lignes de cet ordre :

$$Ay^{n}+(B+Cx)y^{n-1}+(D+Ex+Fx^{2})y^{n-2}+(G+Hx+Ix^{2}+Kx^{3})y^{n-3}+\&c.=0$$

contient $\frac{nn+3n}{2}+$, coëfficients arbitraires A, B, C, D, &c. Or chaque point donné, par lequel la courbe doit paſſer, fournit des valeurs données pour les coordonnées x & y, qui étant ſubſtituées donneront une

une équation. Donc $\frac{nn+3n}{2}$ points donnés conduisent à autant d'equations, par lesquelles tous les coëfficiens A, B, C, &c. seront determinés, & par consequent la courbe même. Car quoique les coëfficients soient d'un de plus, que les équations tirées de $\frac{nn+3n}{2}$ points, puisqu'il ne s'agit ici que du rapport mutuel entre les coëfficients, il n'en faut que $\frac{nn+3n}{2}$ équations pour déterminer tous ces rapports.

IV. Deux lignes droites, ou du premier ordre, ne peuvent se couper mutuellement qu'en un point; deux sections coniques, ou deux lignes du second ordre, ne peuvent se couper en plus qu'en quatre points. Deux lignes du troisieme ordre se peuvent couper en 9 points; deux lignes du quatrieme ordre en 16 points, & ainsi de suite. Et comme une ligne de l'ordre m, peut-être coupée, par une ligne droite en m points, par une ligne du second ordre en $2m$ points, par une ligne du troisieme ordre en $3m$ points; ainsi on soutient en général qu'une ligne de l'ordre m peut-être coupée par une ligne de l'ordre n en mn points. Cette proposition se doit entendre, que le nombre des intersections de deux lignes courbes, dont l'une est de l'ordre m, & l'autre de l'ordre n, ne peut être plus grand que mn, bien qu'il soit souvent plus petit: quelques points d'intersection ou s'éloignant à l'infini, ou devenant imaginaires. La démonstration, de cette proposition n'est pas si aisée, & j'en parlerai plus amplement dans la suite de ce discours. Propos. II.

V. La verité de ces deux propositions étant reconnue, je rapporterai premierement les conséquences qu'on en tire, & qui paroissent être contradictoires. Ensuite je ferai voir le defaut, qui se trouve dans ces conséquences, qui consiste dans une fort subtile précipitation du raisonnement, laquelle n'etant pas si facile à découvrir, nous doit rendre extrémement circonspects, principalement dans les autres ſciences, afin que nous ne nous laiſſions pas ſeduire pas de ſemblables contradictions apparentes. Car, ſi dans la Geometrie nous ſommes aſſujettis à des difficultés ſi remarquables, où il eſt pourtant permis de ramener toutes les idées preſque au plus haut degré de juſteſſe, combien plus pourrons-nous être embarraſſés dans les autres ſciences, où il n'eſt pas poſſible de parvenir à des idées aſſés preciſes, & oú il eſt infiniment plus difficile de ſe garantir de pareilles fautes dans le raiſonnement? Enfin je mettrai dans tout ſon jour la maniere dont il faut entendre ces deux propoſitions, en y appliquant une certaine reſtriction neceſſaire, laquelle étant remarquée, toutes les contradictions, quelques ſolides qu'elles ayent pu paroitre, évanouïront tout d'un coup, & on s'appercevra de la plus belle harmonie entre ces deux propoſitions.

I. Difficulté. VI. La premiere contradiction ſemble d'abord ſe rencontrer dans la proprieté des lignes du troiſieme ordre, ſelon qu'on a égard ou à l'une ou à l'autre des deux propoſitions générales rapportées. Voicy les conſéquences qu'on en tire :

I. *Puisqu'il faut, ſelon la premiere propoſition, 9 points pour déterminer une ligne du troiſieme ordre ; par 9 points donnés on ne peut tirer qu'une ligne du troiſieme ordre.*

II. *Or, ſelon la ſeconde propoſition, deux lignes du troiſiéme ordre ſe peuvent couper en 9 points ; donc on pourra marquer 9 points, par lesquels peuvent paſſer deux lignes du troiſieme ordre.*

Ces deux conſéquences ſe contrediſent ouvertement ; car dans la premiere on ſoutient, que 9 points étant donnés, on ne ſauroit décrire qu'une ligne du troiſieme ordre qui paſſât par chacun de ces 9 points. Neanmoins la ſeconde conſéquence nous fait voir, qu'il y a une infinité de cas, où par neuf points donnés on puiſſe faire paſſer deux lignes du troiſieme ordre.

II. Difficulté. VII. La contradiction devient encore plus ſenſible dans les lignes du quatrieme & de plus hauts ordres. Pour le quatrieme ordre les conſequences contradictoires ſont.

I. Par

I. *Par la premiere proposition, il faut 14 points pour déterminer une ligne du quatrieme ordre : & partant 14 points étant donnés, on ne pourra decrire qu'une ligne de cet ordre, qui passe par tous ces points.*

II. *Mais la seconde proposition nous apprend, que deux lignes du quatrieme ordre se peuvent couper mutuellement en 16 points : par conséquent dans ces cas il sera possible de faire passer deux lignes du quatrieme ordre par 16 points donnés.*

La contradiction de ces deux conséquences est manifeste, car s'il n'étoit pas possible de décrire plus d'une ligne du quatrieme ordre par 14 points donnés ; à plus forte raison on ne sauroit décrire deux lignes de cet ordre, qui passassent toutes les deux par les mêmes 16 points:

VIII. Pour les lignes du cinquieme ordre, nos deux propositions générales nous fournissent ces deux conséquences encore plus contraires entr'elles. III. Difficulté.

I. *La premiere proposition nous enseignant que 20 points suffisent pour determiner une ligne du 5me ordre, il s'en suit que par 20 points donnés on ne sauroit décrire qu'une seule ligne du 5me ordre.*

II. *Or la seconde proposition nous assure, que deux lignes du 5me ordre se peuvent couper mutuellement en 25 points. Donc il sera possible de marquer 25 points, par lesquels on sera en état de faire passer deux lignes du 5me ordre.*

Il y a par conséquent des cas, où 25 points donnés ne sont pas suffisants pour déterminer la ligne du 5me ordre, & pourtant la premiere conséquence nous veut persuader qu'il ne faut que 20 points pour determiner une ligne du cinquieme ordre. Et il est clair que dans les courbes de plus hauts ordres, la difference entre les nombres des points, qui devroient suffire à la détermination, devient encore plus grande.

IX. Ces contradictions étant tout à fait manifestes, il faut absolument, ou que l'une des deux propositions générales soit fausse, ou que les conséquences, qu'on en a tirées, ne soient pas justes. Pour la seconde proposition, quoiqu'on n'en trouve nulle part, à ce que je sache,

ſache, une démonſtration aſſés rigoureuſe, elle eſt pourtant trés certaine, comme je le montrerai cy-apres; & les conſéquences, qui en ont été tirées, ſont ſi claires qu'il ne reſte pas le moindre doute de ce coté là. Car ſi par exemple deux lignes du quatrieme ordre s'entrecoupent en 16 points, on ſera abſolument forcé d'accorder, qu'il eſt poſſible de marquer 16 points, par lesquels on puiſſe faire paſſer non ſeulement une, mais deux lignes du quatrieme ordre. Donc tant la ſeconde propoſition, que les conſéquences, qu'on en a tirées, étant tout à fait averées, nous ſommes obligés de conclure, que c'eſt dans la premiere propoſition, ou dans la maniere d'en tirer les conſéquences marquées Nro. I, qu'il faut chercher quelque paralogisme.

X. Les conſéquences, qu'on a tirées de la prémiere propoſition, ſont également bien fondées: car ſi 9 points déterminent une ligne du troiſieme ordre, il s'enſuit, que par 9 points donnés on ne ſauroit tirer qu'une ligne de cet ordre: de même que par deux points donnés on ne peut tirer qu'une ligne droite, & par cinq points donnés une ſeule ſection conique. Donc, ſi l'equation générale pour les lignes de l'ordre n eſt déterminée par $\frac{nn+3n}{2}$ points, par lesquels elle doit paſſer, il ne ſera pas poſſible, que plus d'une ligne de cet ordre paſſe par autant de points donnés, que cette formule $\frac{nn+3n}{2}$ contient d'unités. Ce n'eſt pas donc dans les conſéquences, qu'on vient de déduire de la prémiére propoſition, qu'il faut chercher la ſource de ces contradictions: & par conſéquent il ne reſte que la prémiére propoſition même, ſur laquelle puiſſe tomber le ſoupçon d'un paralogisme, quelque fondée qu'elle paroiſſe d'ailleurs.

XI. En effet, en réfléchiſſant bien ſur l'état de la prémiére propoſition, nous remarquerons qu'il peut y avoir des cas, où $\frac{nn+3n}{2}$ points donnés ne ſont pas ſuffiſans pour déterminer la courbe de l'ordre n, qui peut être tirée par ces points: ou, ce qui revient

vient au même que $\frac{nn+3n}{2}$ équations ne ſuffiſent pas pour déterminer autant de coëfficients, ou pour déterminer le rapport entre $\frac{nn+3n}{2}+1$ coëfficients : quoique ces coëfficients entrent dans chacune des équations, & qu'ils n'y occupent qu'une ſeule dimenſion. D'ailleurs c'eſt le cas le plus ſimple, où pluſieurs inconnuës doivent être déterminées par autant d'équations, puisque par l'elimination ſucceſſive de ces quantités inconnuës, on demeure toujours au premier degré, de ſorte qu'on ne trouve jamais pour chaque inconnuë plus d'une valeur, qui par conſéquent ſera toujours réelle. Circonſtance qui paroit d'autant plus confirmer la verité de la premiere propoſition, & l'affranchir de toute exception.

XII. Cependant on ne doutera plus, qu'on ne doive appliquer à cette premiére propoſition une certaine reſtriction, ſans laquelle elle ne ſauroit être vraie en général ; dés qu'on aura égard aux réfléxions ſuivantes.

Prémierement donc je dis, pour commencer des cas les plus ſimples, qu'il peut arriver. que deux équations ne ſont pas ſuffiſantes pour déterminer les valeurs de deux inconnuës, quoique toutes les deux entrent dans chacune de ces deux équations, & n'y occupent qu'une ſeule dimenſion. Car on n'a qu'à regarder ces deux équations $3x-2y=5$ & $4y=6x-10$ & on verra d'abord, qu'il n'eſt pas poſſible d'en déterminer les deux inconnuës x & y : puisqu'en eliminant l'une x, l'autre s'en va d'elle même, & on obtient une équation identique, dont on n'eſt en état de determiner rien. La raiſon de cet accident ſaute d'abord aux yeux, puisque la ſeconde équation ſe change en $6x-4y=10$, qui n'etant que la premiere $3x-2y=5$ doublée, n'en differe point. C'eſt pourquoi, quand on dit que pour déterminer deux quantités inconnuës, il ſuffit d'avoir deux équations, il faut joindre à cette propoſition cette reſtriction, que ces deux équations ſoient differentes entr'elles, ou que l'une ne ſoit pas déjà compriſe dans l'autre & ce n'eſt qu'avec cette reſtriction, que ladite propoſition puiſſe être admiſe. I.

XIII.

II Réflexion. XIII. En ſecond lieu, on reconnoitra aiſément, que trois équations peuvent ne ſuffire pas à determiner trois quantités inconnues. Car s'il arrive le même cas, que dans la réflexion precedente, qu'une des trois équations ſoit compriſe dans une des deux autres, auquel cas les trois équations ne valent que deux; alors il ſera impoſſible d'en déterminer les trois inconnuës. Comme ſi l'on avoit ces trois équations:

$$4x - 6y + 10z = 16$$
$$3x - 5y + 7z = 9$$
$$2x - 3y + 5z = 8$$

il eſt clair que la premiere ne differant de la 3^{me}, ne contribuë rien à la détermination des trois inconnuës x, y & z. Mais il y a auſſi des cas, où une des trois équations eſt contenuë dans les deux autres conjointement, comme ſi l'on avoit ces trois équations:

$$2x - 3y + 5z = 8$$
$$3x - 5y + 7z = 9$$
$$x - y + 3z = 7$$

où la ſomme de la premiere & troiſieme produit la ſeconde. Dans ce cas on peut obmettre telle de ces trois équations qu'on voudra, & il eſt de même que s'il n'y avoit que deux équations. Ainſi quand on dit, que pour déterminer trois inconnuës, il ſuffit d'avoir trois équations, il y faut ajouter cette reſtriction, que ces trois équations different tellement entr'elles, qu'aucune ne ſoit dëjà compriſe dans les autres.

III. Réflexion. XIV. Il en eſt de même de quatre équations, qui ne ſont ſuffiſantes à determiner quatre quantités inconnues, qu'au cas qu'elles ſoient toutes differentes entr'elles, ou qu'aucune ne ſoit déjà renfermée dans les autres. Car ſi une eſt déjà compriſe dans les trois autres, ces quatre équations doivent être regardées, comme s'il n'y avoit que trois. Il peut même arriver, que deux équations ſoient déjà compriſes dans les deux autres, & alors il n'y aura que deux équations, qui reſtent dans le calcul, & par conſéquent deux inconnuës reſteront

ront indéterminées. Comme ſi l'on étoit parvenu à ces quatre équations :

$$5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0$$
$$2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0$$
$$x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0$$
$$3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0$$

elles ne vaudroient que deux. Car ayant tiré de la troiſieme la valeur de $x = -13y + 14z - 15v - 16$, & l'ayant ſubſtituée dans la ſeconde pour avoir : $y = \frac{33z - 36v - 52}{29}$ & $x = -\frac{23z + v33 + 212}{29}$, ces deux valeurs de x & y étant ſubſtituées dans la premiere & quatrieme équation conduiront à des équations identiques, de ſorte que les quantités z & v reſteront indéterminées.

XV. La même circonſtance peut avoir lieu en quelque nombre d'equations qu'on voudra, de ſorte que quand même on auroit autant d'equations, qu'il y a d'inconnuës, elles ne pourroient pas être ſuffiſantes à les déterminer toutes. Car une des quantités inconnuës reſtera indéterminée, ſi une des équations propoſées eſt renfermée dans les autres. De plus, deux ou pluſieurs quantités inconnuës reſteront indéterminées, s'il y a parmi les équations deux ou pluſieurs, qui ſont déjà renfermées dans les autres, & qui par conſéquent ne contribuënt rien à la détermination des inconnuës. C'eſt pourquoi quand on ſoutient, que pour déterminer n quantités inconnuës, il ſuffit d'avoir n équations, qui expriment leur rapport mutuel, il y faut ajouter cette reſtriction, que toutes les équations ſoient differentes entr'elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui ſoit déjà renfermée dans les autres. **IV. Réflexion.**

XVI. Apres ces réfléxions on conviendra aiſément, que pour la détermination de la ligne courbe d'un certain degré le nombre des points, qui ſelon la premiere propoſition paroit ſuffiſant, peut en certains

certains cas devenir insuffisant, puisque cette détermination se réduit à la détermination d'un certain nombre de coëfficients par autant d'équations, qui, à ce que nous venons de voir, peuvent quelquefois devenir insuffisantes à ce dessein. Pour connoitre ces cas, je considererai premierement l'équation générale pour les lignes droites au du premier ordre: $\alpha y + \zeta x + \gamma = o$, & soient proposés deux points, par lesquels doive passer une ligne de cet ordre. Ayant choisi une ligne droite quelconque pour $a x e$, soient a & b les coordonnées pour premier point & $c d$, pour l'autre: ou pour le premier point on aura $x = a$; $y = b$; & pour l'autre $x = c$; $y = d$; d'où nous tirerons ces deux équations:

$$\alpha b + \beta a + \gamma = o. \quad \alpha d + \beta c + \gamma = o$$

de la difference desquelles nous aurons: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{c - a}{b - d}$. Le rapport donc entre α & ζ sera toujours déterminé, à moins qu'il ne soit $c = a$ & $d = b$, auquel cas les deux points tombent l'un sur l'autre. Donc deux points déterminent une ligne droite, pourvu qu'ils ne soient pas coïncidents. Restriction qui s'entend de soi même dans la description de toutes les autres lignes courbes, parce que deux points qui tombent l'un sur l'autre, ne sont reputés que comme un seul.

XVII. L'équation générale pour les lignes du second degré étant:

$$\alpha x^2 + \beta x y + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = o$$

que 5 points soient proposés, par lesquels on doive décrire une ligne du second ordre. Pour abréger le calcul, qu'on prenne une ligne droite, qui passe par deux de ces points, pour axe, & une autre ligne tirée par un de ces deux points, & un troisieme, répréfente l'inclinaison des appliquées, puisqu'il est indifferent de les supposer perpendiculaires à l'axe, ou non. Cela supposé, soient les valeurs de x & y pour ces 5 points donnés;

	I	II	III	IV	V
$x =$	o	a	o	c	e
$y =$	o	o	b	d	f

De

De là nous aurons les 5 équations ſuivantes :

$$
\begin{array}{ll}
\text{I.} & \zeta = 0 \\
\text{II.} & \alpha a^2 + \delta a + \zeta = 0 \\
\text{III.} & \gamma b^2 + \varepsilon b + \zeta = 0 \\
\text{IV.} & \alpha c^2 + \beta c d + \gamma d^2 + \delta c + \varepsilon d + \zeta = 0 \\
\text{V.} & \alpha e^2 + \beta e f + \gamma f^2 + \delta e + \varepsilon f + \zeta = 0
\end{array}
$$

Des trois premieres nous avons d'abord :

$$\zeta = 0;\ \delta = -\alpha a;\ \&\ \varepsilon = -\gamma b.$$

ces valeurs étant ſubſtituées dans les deux dernieres donnent ces équations

$$\alpha c^2 + \beta c d + \gamma d^2 - \alpha a c - \gamma b d = 0$$
$$\alpha e^2 + \beta e f + \gamma f^2 - \alpha a e - \gamma b f = 0$$

que détermineront la courbe cherchée, à moins qu'elles ne ſoient pas équivalentes. Or ce cas arrivera, quand les deux valeurs de β qu'on en tire ſeront les mêmes

$$\beta = \frac{\alpha c(a-c) + \gamma d(b-d)}{c d} = \frac{\alpha e(a-e) + \gamma f(b-f)}{e f}$$

c. à. d. ſi $\frac{a-c}{d} = \frac{a-e}{f}$ & $\frac{b-d}{c} = \frac{b-f}{e}$; ou ſi

$a = \frac{cf - de}{f-d}$ & $b = \frac{de - cf}{e-c}$. Par là on voit, que les cinq points donnés peuvent être tellement diſpoſés, que la ligne du ſecond ordre n'en eſt pas déterminée, & puiſque un coëfficient demeure indéterminé, il s'enſuit que par ces cinq points donnés on pourra faire paſſer une infinité de lignes du ſecond ordre.

XVIII. Si nous conſiderons de plus prés ce cas, où les cinq points donnés peuvent être inſuffiſants pour déterminer la ligne du ſecond ordre, nous remarquerons aiſément que cela arrive, quand quatre de ces cinq points donnés ſont diſpoſés dans une ligne droi-

 te.

te. Cela deviendra affés clair, fi des équations $\frac{a-c}{d} = \frac{a-e}{f}$ & $\frac{b-d}{c} = \frac{b-f}{e}$ nous tirons les valeurs $f = \frac{d(a-e)}{a-c} = b - \frac{e(b-d}{c}$ ce qui donne $(c-e)(ad-ab+bc) = o$. Lorsque $e = c$, il y aura auffi $f = d$, & deux points tombent l'un fur l'autre; lequel cas s'exclut de lui même. Soit donc $ad - ab + bc = o$ ou $d = b - \frac{bc}{a}$, & on trouvera $f = b - \frac{be}{c}$; on n'a à prefent qu'à regarder ces formules geometriquement, pour s'affurer, que quatre points font fitués en ligne droite. Il nauroit pas été difficile de deviner d'abord ce cas, car puisque le fecond ordre renferme auffi deux lignes droites fituées d'une maniere quelconque, on reconnoit, que fi trois des cinq points donnés font en ligne droite, celle-cy fera part de la ligne du fecond ordre, & l'autre droite conjuguée fera determinée par les deux autres points. Donc, fi quatre points font fitués en ligne droité, celle-cy fera part de la ligne cherchée, mais l'autre partie, ou l'autre ligne droite paffera par le cinquieme point, & n'ayant pas d'autres déterminations, on la pourra tirer comme on voudra. Si tous les cinq points donnés étoient fitués en ligne droite, cette même droite avec toute autre quelconque fatisferoit à la queftion; donc, ce cas fera encore moins déterminé que le précedent.

XIX. L'equation générale pour les lignes du troifieme ordre étant:

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 + \epsilon x^2 + \zeta x y + \eta y^2 + \theta x + \iota y + \kappa = o$$

il faut definir neuf coëfficients par le dixiême, pour que l'equation ou la ligne de cet ordre foit determinée. Donc fi neuf points font donnés, par lesquels cette ligne doit paffer, chacun fourniffant une équation, la ligne fera déterminée, pourvu que ces neuf équations foient toutes differentes entr'elles, & qu'il n'y en ait aucune, qui foit déja déjà comprise dans les autres. Or on comprendra aisément, qu'il y a une infinité de cas, où non seulement une, mais aussi deux, ou plusieurs des neuf équations peuvent déjà être renférmées dans les autres: & par conséquent dans ces cas la courbe ne sera point déterminée par les 9 points proposés, mais on y pourra encore ajouter le dixieme, & même l'onzieme, ou le douzieme, afin que la détermination devienne complette. Il est cependant fort difficile de définir ces cas généralement, comme j'ai fait pour les lignes du second ordre, puisque le calcul à cause du grand nombre des points, & des coëfficients, deviendroit trop compliqué. Neanmoins il n'est pas difficile de découvrir plusieurs cas particuliers, où ce defaut dans la détermination a lieu; desquels on ne conclurra pas difficilement, que le nombre de tels cas peut être infiniment grand, ce qui suffit pour mon dessein.

XX. On sait que l'équation générale du troisieme ordre comprend, outre les lignes courbes de cet ordre; aussi ou trois lignes droites, ou une ligne droite jointe à une section conique. Donc si des neuf points donnés quatre sont disposés en ligne droite, puisque dans les lignes courbes de cet ordre il n'y a pas quatre points en ligne droite, cette ligne droite tirée par ces quatre points constituera une partie de la figure cherchée, & les cinq autre points détermineront l'autre partie, qui sera ou une section conique, ou deux droites; & ici peut déjà avoir lieu le cas précedent de marque de détermination. Mais supposons que 5 points soient situés en ligne droite, qui constituera une partie de la figure, & il est clair que les autres 4 points ne sont pas suffisants pour déterminer l'autre partie. Dans ce cas donc on aura besoin de dix points pour déterminer la figure: or si des points proposés il y en a 6 situés en ligne droite, il en faut encore 5, & partant en tout 11 points pour déterminer entierement la question. Et de là il est evident, qu'il peut arriver, que quelque grand nombre que ce soit de points, ne soit pas suffisant pour la détermination d'une ligne du troisieme ordre, qui doit passer par tous ces points.

XXI. Comme ces cas n'ont lieu que dans les lignes droites qui sont comprises dans l'équation générale des lignes du troisieme ordre

ordre, on doutera peut être, ſi la même choſe peut arriver dans les lignes courbes de troiſieme ordre, ou ſi neuf points peuvent être inſuffiſants pour déterminer une ligne courbe propre à cet ordre. Pour prouver cela je ne conſidererai qu'un cas, où les neuf points donnés ſont diſpoſés en quarré *a b c d e f g h i*: que l'axe ſoit tiré par les points *d e f*, & que le point *e* ſoit le commencement des abſciſſes. Nommant l'intervalle de deux points $= a$, nous aurons pour l'abſciſſe $x = o$, trois valeurs pour l'appliquée y, qui ſont o, $+ a$, & $- a$; & ces mêmes trois valeurs répondront auſſi à l'abciſſe $x = a$, & à $x = - a$. A'ces valeurs répondra cette équation

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

$$my(yy - aa) = nx(xx - aa)$$

où le rapport des coëfficients m & n peut être quelconque, de ſorte qu'une infinité de lignes du troiſieme ordre peut être indiquée, qui paſſent toutes par ces points donnés.

XXII. Il eſt bien vrai que cette équation renferme auſſi des lignes droites, & des ſections coniques: car ſi $n = o$, on aura trois lignes droites *a c*, *d f* & *g i*: ſi $m = o$, on aura trois lignes droites *a g*, *b h* & *c i*: ſi $m = n$, on aura une droite *a e i*, & une ellipſe tirée par les points *b c f d g h*: & ſi $m = - n$, la ligne du troiſieme ordre ſera compoſée d'une ligne droite *c e g* & d'une ellipſe qui paſſe par les points *a b d f h i*. Mais dans tous les autres rapports, qu'on poſe entre m & n, on aura toujours une vraie ligne courbe, qui paſſe par les neuf points donnés. Et de là on comprendra aiſément que toutes les fois, que deux lignes du troiſieme ordre, ſe coupent en 9 points, ces points ſeront tels, qu'ils ne déterminent pas tout à fait la ligne du troiſieme ordre, & que dans l'équation générale, aprés qu'on l'aura appliquée à ces neuf points, il reſtera un coëfficient indéterminé. Dans ces cas donc, il n'y aura pas ſeulement deux lignes du troiſieme ordre, mais une infinité de lignes de cet ordre, qui peuvent toutes être décrites par ces neuf points.

XXIII.

XXIII. Quand deux lignes du quatrieme ordre s'entrecoupent en 16 points, puisque 14 points, lorsqu'ils conduiſent à des équations toutes differentes entr'elles, ſont ſuffiſants pour déterminer une ligne de cet ordre ; ces 16 points ſeront toujours tels, que trois ou pluſieurs des équations, qui en réſultent, ſont déjà compriſes dans les autres. De ſorte que ces 16 points ne déterminent plus que s'il n'y en avoit que 13, ou 12, ou encore moins, & partant pour déterminer la courbe entierement, on pourra encore à ces 16 points ajouter un ou deux points. La même choſe arrivera ſi deux lignes du cinquieme ordre ſe coupent l'une l'autre en 25 points, qui n'etant pas ſuffiſants à determiner la courbe, ils ne vaudront plus que 19, ou même 18, de ſorte que 6 ou 7 points ſont ſuperflus : & partant ces 25 points ſeront toujours tellement diſpoſés, que dés que la courbe paſſe par 19 de ces points, elle paſſera d'elle même auſſi par les autres, ou il ſera impoſſible qu'elle paſſe par 19 points, ſans paſſer en même tems par tous les 25. Ces réfléxions étant bien compriſes, on réſoudra aiſément toutes les autres difficultés, qui pourroient naitre de la comparaiſon des deux propoſitions générales, que j'ai rapportées dans le commencement de ce diſcours.