19.

EULER A LAGRANGE.

Berlin, 9 novembre 1762 (¹).

MONSIEUR,

Je dois être infiniment flatté de la distinction toute particulière, dont la nouvelle Académie Royale des Sciences vient de m'honorer, en accordant une place dans ses Mémoires à mes faibles recherches sur la propagation du son, que j'avais pris la liberté de vous envoyer. Je connais tout le prix de cette distinction, et j'en suis le plus vivement touché; ce que je vous supplie, monsieur, de témoigner à l'illustre Académie, et de lui présenter mes très humbles remercîments en l'assurant de ma plus haute vénération et de mon attachement le plus inviolable. Mais je ne sens aussi que trop que c'est uniquement à vous que je suis redevable de cette glorieuse distinction. Je vous en suis infiniment obligé, de même que des deux exemplaires du premier Recueil académique que vous m'avez bien voulu envoyer. Vous ne douterez pas que je ne l'aie parcouru avec la plus grande avidité, et je fus tout à fait surpris de l'excellence et de la richesse des Mémoires que ce Recueil renferme. Vous en particulier, Monsieur, vous y avez véritablement prodigué vos profondes découvertes; tout autre en aurait eu abondamment de quoi fournir à plusieurs Académies et à plusieurs Volumes, pendant que vous y avez ramassé en quelques morceaux des sciences entières et accomplies, dont la moindre particule aurait coûté à d'autres les plus pénibles recherches. Vous ne craignez pas de vous épuiser pour les Volumes suivants, puisque vos ressources sont inépuisables; et je suis tout stupéfait, quand je pense seulement que les Volumes suivants ne brilleront pas moins de nouvelles découvertes, quoique je ne puisse pas encore comprendre sur quelles matières elles rouleront. Mais je vous avoue franchement, que je ne suis quasi

(¹) Ms. f° 18. — *Opera postuma*, t. II, p. 564.

qu'ébloui de l'abondance et de la profondeur de vos recherches, et bien d'autres souhaiteront avec moi que vous preniez la peine de traiter successivement plus en détail tous les sujets particuliers, que vous n'avez fait jusqu'ici qu'envelopper dans la plus grande généralité.

Quelle satisfaction n'aurait pas M. de Maupertuis, s'il était encore en vie, de voir son principe de la moindre action porté au plus haut degré de dignité dont il est susceptible (1).

Dans vos autres recherches, il s'agit principalement d'une branche tout à fait nouvelle de l'Analyse, qui mériterait bien d'être développée avec tous les soins possibles. C'est la résolution de cette espèce d'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \mathrm{P}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mathrm{Q}\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{R}z,$$

dont l'intégrale complète renferme par sa propre nature des fonctions indéterminées, et même discontinues, contre les prétentions de M. d'Alembert, qui cependant sera bien embarrassé des réponses solides que vous lui avez faites, quoique je doute fort qu'il s'y rende (2). Avant toutes choses, il faudrait bien chercher des méthodes plus propres à traiter ces équations. Il semble que des transformations convenables y puissent beaucoup contribuer. En voici un échantillon que j'appliquerai au cas le plus simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

au lieu des variables t et x, j'en introduirai deux autres p et q, de sorte que

$$p = \alpha x + \beta t \qquad \text{et} \qquad q = \gamma x + \delta t.$$

(1) « Ce principe, dit Delambre (Biographie Michaud, art. *Maupertuis*), que Maupertuis prétendait déduire philosophiquement des causes finales, était ainsi énoncé par lui : *La quantité d'action nécessaire pour produire un changement dans le mouvement des corps est toujours un minimum.* Il entendait par *quantité d'action* le produit d'une masse par sa vitesse et par l'espace qu'elle parcourt. » — *Voir*, dans le Tome II des *Œuvres* de Maupertuis (1756, in-8°, p. 243 et suiv.), la Lettre XI : *Sur ce qui s'est passé à l'occasion du principe de la moindre action.*

(2) *Voir*, dans le Tome XIII, les Lettres 3, 8, 9, etc.

Pour cet effet, considérant une fonction quelconque de t et x qui soit v, puisque

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial x}dx$$

et par les nouvelles variables

$$dv = \frac{\partial v}{\partial p}dp + \frac{\partial v}{\partial q}dq,$$

en substituant ici pour dp et dq leurs valeurs, j'aurai

$$\begin{aligned} dv &= \alpha\frac{\partial v}{\partial p}dx + \beta\frac{\partial v}{\partial p}dt + \gamma\frac{\partial v}{\partial q}dx + \delta\frac{\partial v}{\partial q}dt, \\ &= \left(\alpha\frac{\partial v}{\partial p} + \gamma\frac{\partial v}{\partial q}\right)dx + \left(\beta\frac{\partial v}{\partial p} + \delta\frac{\partial v}{\partial q}\right)dt; \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit, pour les substitutions dont j'ai besoin,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta\frac{\partial v}{\partial p} + \delta\frac{\partial v}{\partial q} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha\frac{\partial v}{\partial p} + \gamma\frac{\partial v}{\partial q};$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \beta\frac{\partial z}{\partial p} + \delta\frac{\partial z}{\partial q} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + 2\beta\delta\frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q} + \delta^2\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \alpha\frac{\partial z}{\partial p} + \gamma\frac{\partial^2 z}{\partial q} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + 2\alpha\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q} + \gamma^2\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}. \end{aligned}$$

Maintenant je pose

$$\beta^2 - \alpha^2 a = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta^2 - \gamma^2 a = 0$$

ou

$$\beta = \alpha\sqrt{a} \qquad \text{et} \qquad \delta = -\gamma\sqrt{a},$$

pour avoir cette équation

$$2(\beta\delta - \alpha\gamma a)\frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q} = 0.$$

A présent M. d'Alembert ne saurait disconvenir que l'intégration de cette formule, en ne prenant que p variable, ne donne

$$\frac{dz}{dq} = \varphi'(q)$$

et ensuite, faisant quarrer,

$$z = \varphi(q) + \psi(p) = \varphi(x - t\sqrt{a}) + \psi(x + t\sqrt{a}),$$

où ces fonctions sont absolument indéterminées et dépendent entièrement de notre volonté, de sorte que la construction générale se puisse faire par deux courbes décrites à plaisir, l'appliquée de l'une donnant $\varphi(x - t\sqrt{a})$ pour l'abscisse $x - t\sqrt{a}$, et de l'autre $\psi(x + t\sqrt{a})$ pour l'abscisse $x + t\sqrt{a}$.

Mais, si l'on demandait une semblable intégrale complète pour le cas où a serait une quantité négative $-b$, je ne vois pas comment on la pourrait représenter par des courbes arbitraires, puisqu'on n'y saurait assigner les appliquées qui répondent à des abscisses imaginaires.

La réduction aux arcs de cercle, en posant

$$x = v\cos\varphi \qquad \text{et} \qquad t\sqrt{b} = v\sin\varphi,$$

qui donneront

$$z = A + Bv\cos\varphi + Cv^2\cos 2\varphi + \ldots + Kv\sin\varphi + Lv^2\sin 2\varphi + \ldots,$$

combien de termes qu'on ne prenne [1], ne saurait jamais produire une solution générale, en sorte que posant $t = 0$, il en résulte entre z et x une relation donnée exprimée par quelque courbe décrite à volonté.

Pour le problème des isopérimètres pris dans sa plus grande étendue, c'est à vous que nous sommes redevables de la plus parfaite solution, et je fus bien surpris de voir par quelle adresse vous l'avez étendu à des surfaces et même à des polygones. Vous conviendrez que ces profondes recherches mériteraient un développement plus détaillé. Il est fâcheux que la solution du cas où l'on demande, entre tous les solides de la même capacité, celui dont la surface est la plus petite conduise à une équation presque absolument intraitable; on voit bien que les surfaces sphériques et cylindriques y sont comprises, sans être en état de les en conclure. Mais les corps ont des bizarreries qui ne se trouvent pas dans les surfaces; quoique tous les côtés d'un polygone et même

[1] C'est-à-dire quel que soit le nombre des termes.

leur ordre soient donnés, la figure est encore susceptible d'une infinité de déterminations; mais, dans un polyèdre, dès qu'on connaît tous les hèdres [1] avec leur ordre, le corps est tout à fait déterminé. Ensuite, on ne saurait donner deux courbes différentes qui aient pour toutes les abscisses des arcs égaux; mais on peut toujours trouver une infinité de surfaces différentes où les éléments $dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$ soient les mêmes. Ainsi les surfaces coniques dont l'axe est perpendiculaire à la base conviennent avec une surface plane, et les corps exprimés par ces équations $az=xy$ et $2az=x^2+y^2$ ont leurs surfaces égales, puisque p^2+q^2 est le même de part et d'autre; mais on trouve aisément une infinité d'autres surfaces de la même nature, où l'on peut même introduire des fonctions arbitraires et discontinues. Or il est plus difficile de trouver de tels corps, dont la surface convienne avec celle de la sphère. Il s'agit de trouver une telle équation intégrable $dz=p\,dx+q\,dy$ que p^2+q^2 soit égal à $\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}$. Je puis bien définir toutes les fonctions possibles pour p et q, mais je n'en puis tirer aucune d'où l'équation entre x, y et z devient algébrique. C'est encore un sujet qui demande la nouvelle branche de l'Analyse qui roule sur les fonctions de deux ou plusieurs variables, de certains rapports entre leurs différentiels étant donnés.

Sur le problème du mouvement d'un corps attiré vers deux points fixes en raison réciproque carrée des distances, j'ai trouvé moyen de construire la courbe que le corps décrit quand même elle ne serait point dans le même plan, et j'y ai observé une infinité de cas où la courbe devient algébrique, outre ceux de l'ellipse ou hyperbole dont les foyers tombent dans les deux points fixes.

J'ai l'honneur d'être avec la plus haute considération, monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. Euler.

[1] *Hèdre*, surface.