les plus empressés à toute votre illustre Société, et soyez assuré que je suis avec le plus parfait attachement, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. Euler.

15.

LAGRANGE A EULER.

Turin, le 1er mars 1760 (1).

Monsieur,

Notre Société a reçu la pièce que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser dans votre dernière lettre du 1er janvier, avec tous les sentiments d'estime et de reconnaissance dus au mérite de votre illustre personne. Elle est extrêmement flattée de pouvoir orner ses nouveaux *Mélanges* d'un nom tel que le vôtre, ce qui ne peut pas manquer de lui attirer dans le public une considération à laquelle elle n'aurait jamais osé prétendre. Quelques occupations indispensables m'ont empêché de vous répondre plus tôt pour m'acquitter de ce devoir que toute la Société m'a d'abord imposé de vous remercier en son nom, et de vous témoigner combien elle a été sensible à une telle marque d'honneur qu'il vous a plu de lui donner; je vous prie d'en recevoir mes très humbles excuses. J'ai lu vos recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique avec la même admiration avec laquelle j'ai toujours étudié tous vos Ouvrages. J'ai été charmé surtout de voir l'analyse du problème de la propagation des ébranlements finis, sur lequel je m'étais déjà exercé en vain; je doute cependant qu'on puisse jamais, au moins par les méthodes connues, parvenir à la construction de telles équations, dans lesquelles les fonctions inconnues se trouvent engagées entre elles dans des puissances quelconques, comme il en est

(1) *Lettres inédites*, p. 41.

de celles que vous avez découvertes pour les ébranlements finis. Il y a longtemps que cette espèce d'équations m'est connue, y ayant été conduit par la recherche des plus grands et plus petits dans les surfaces courbes, selon ma méthode analytique, que j'ai eu autrefois l'honneur de vous communiquer. Par exemple, si l'on cherche la figure d'un corps qui, sous la même surface, ait la plus grande solidité, je trouve, en appelant x, y, z ses coordonnées rectangles, de sorte que $z =$ fonctions x, y, et $dz = p\,dx + q\,dy$, l'équation générale

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{1}{a} = 0,$$

a étant une constante arbitraire quelconque, je vois que je puis satisfaire à cette équation en supposant $z^2 = 4a^2 - x^2 - y^2$, ce qui donne une sphère de rayon $= 2a$; mais ce n'est là qu'une solution tout à fait particulière. A l'égard de la générale, je désespère de pouvoir jamais la trouver. Il en est de même de tous les autres problèmes *de maximis et minimis*, que personne que je sache n'a jamais encore traités sous ce nouveau point de vue. J'ai été extrêmement satisfait de trouver dans votre Mémoire la construction de l'équation pour les ébranlements sphériques infiniment petits, tout à fait conforme à celle que ma méthode m'a donnée et que j'espère que vous aurez pu voir dans la lettre que je vous ai, pour cela, envoyée le 27 décembre de l'année passée. Il n'y a de différence entre vos résultats et les miens, qu'en ce qui regarde l'affaiblissement des ébranlements, dont vous faites diminuer la force en raison inverse des distances, lorsqu'elles sont assez grandes, au lieu que cette raison se trouve, selon mes calculs, toujours l'inverse des carrés des distances; mais c'est une méprise que j'ai reconnue ensuite, et dans laquelle je n'ai été entraîné qu'en considérant l'équation intégrale

$$z = \int \frac{Z\varphi(Z \pm t\sqrt{c})}{Z^2},$$

qui m'était d'abord résultée, sans y donner l'attention nécessaire. M. Daniel Bernoulli m'a écrit, il n'y a pas longtemps, que des recherches qu'il avait faites autrefois sur les vibrations de l'air dans des tuyaux coniques lui avaient appris que la force des ébranlements diminuait aussi dans la raison inverse des distances simples depuis le sommet du cône, ce qui devait être ainsi pour tout ébranlement répandu à la ronde autour d'un centre. Il faudrait que la même loi fût encore observée dans la lumière, supposé que sa propagation se fasse, comme il est très vraisemblable, par les ébranlements d'un milieu élastique, ce qui ne s'accorde pas avec l'opinion reçue des physiciens, qui établissent sa diminution dans la raison inverse doublée des distances : c'est pourquoi ce géomètre souhaiterait qu'on fît sur ce projet des expériences exactes qui pussent nous mettre en état de décider un point si important.

Dans ma dernière lettre mentionnée, je n'ai donné que les formules générales pour résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c\left[\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + m\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{z}{Z}\right)\right],$$

qui contient les lois des ébranlements de l'air dans un tuyau conoïdal, dont les sections sont proportionnelles à Z^m, formules qui ne deviennent exactes et finies, que lorsque $\pm(m+1)-1$ est un nombre pair positif. Or, j'ai trouvé depuis moyen de les étendre encore à cette autre équation

$$Z^n\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c\left[\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + m\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{z}{Z}\right)\right],$$

qui est beaucoup plus générale et qui appartient aussi au même problème; mais, en supposant l'air hétérogène et de différente gravité spécifique, j'ai trouvé que, pour que la valeur de z soit ici exprimée par une formule finie, il faut que $\pm\frac{2m+2}{n+2}-1$ soit un nombre pair positif. Si on suppose $m=0$, on a la solution du problème des vibrations des cordes inégalement épaisses, qui ne peut être exacte, par mes calculs, à moins que $\pm\frac{2}{n+2}-1$ soit un nombre pair positif, de sorte que, posant pour μ un nombre quelconque entier positif, il faudra que $n=\pm\frac{2}{2\mu+1}-2$. Par exemple, si $\mu=0$ et qu'on prenne le signe négatif, on aura

$$n = 4 \qquad \text{et} \qquad z = Z\varphi(Z^{-1} \pm t\sqrt{c});$$

si $\mu = 1$, prenant le signe positif, on aura $n = -\frac{4}{3}$ et la valeur de z sera

$$\varphi\left(Z^{\frac{1}{3}} \pm \frac{t\sqrt{c}}{3}\right) - Z^{\frac{1}{3}}\varphi'\left(Z^{\frac{1}{3}} \pm \frac{t\sqrt{c}}{3}\right);$$

en général, ces formules auront toujours autant de termes qu'il y a d'unités dans $\mu + 1$; mais ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'excepté la première, et celle où $n = 0$, qui ne sont composées que d'un seul terme, toutes les autres donnent des courbes génératrices avec des branches dissemblables à l'infini; d'où il suit que les cordes ne peuvent jamais plus reprendre leur figure primitive, si cela n'arrive par hasard, et rendre par conséquent un ton fixe et invariable; c'est ce que l'expérience paraît confirmer dans toutes les cordes d'inégale épaisseur, et que les musiciens nomment pour cela fausses. Comme il serait de la dernière importance de décider si la grandeur des ébranlements peut rendre leur propagation plus prompte, j'ai cherché des moyens pour résoudre ce problème au moins par approximation, en supposant d'abord les ébranlements infiniment petits et puis en introduisant dans les termes qu'on a négligés les valeurs trouvées, et résolvant de nouveau l'équation, comme on le pratique ordinairement dans toutes les approximations. J'ai vu que le tout dépendait de la résolution des équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + F \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c\left[\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + 2\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{z}{Z}\right)\right] + F,$$

F étant une fonction quelconque donnée de Z et t; or j'ai trouvé pour cela, selon ma méthode, les formules suivantes : soit fait $Z + t\sqrt{c} = p$; $Z - t\sqrt{c} = q$ et, substituant dans $\int F\,dZ$ au lieu de Z d'abord $p - t\sqrt{c}$, ensuite $q + t\sqrt{c}$, qu'elle devienne $\psi(p, t)$ et $\psi(q, t)$; on aura, pour la première équation,

$$z = \varphi(p) + \varphi(q) + \int \frac{[\psi(p, t) - \psi(q, t)]\,dt}{2\sqrt{c}}$$

et, pour la seconde,

$$\varphi + \frac{\partial}{\partial Z} z Z = \varphi(p) + \varphi(q) + \int \frac{\left[\psi(p,t) - \psi(q,t) + (p - t\sqrt{c})\dfrac{\partial\psi(p,t)}{\partial p} - (q + t\sqrt{c})\dfrac{\partial\psi(q,t)}{\partial q}\right] dt}{2\sqrt{c}}.$$

Or, en considérant le cas d'une ligne physique d'air, on trouve aisément l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} - c\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} - \frac{\partial^3 z}{\partial Z^3} + \dots\right);$$

on aura donc, pour la première approximation qui provient du terme $\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2}$,

$$z = \varphi(p) + \varphi(q) - \frac{t\sqrt{c}}{2}\sqrt{\varphi'^2(p) - \varphi'^2(q) - \tfrac{1}{2}[\varphi'(p) - \varphi'(q)]^2},$$

sauf erreur de calcul; on trouvera aussi, par les approximations suivantes, des termes de trois, de quatre, ... dimensions de φ. Or, afin que la vitesse de la propagation augmente, il faudrait que ce fût le coefficient de t dans $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$ qui augmente, ce qui devrait donner des termes à ajouter à φ de cette sorte $\alpha t\varphi'$, $\beta t^2\varphi''$, ..., d'où il me paraît raisonnable de pouvoir conclure que les termes trouvés ne sont nullement propres à faire augmenter cette vitesse. On trouvera aussi des résultats semblables en calculant la propagation par la seconde formule; mais je me défendrai néanmoins de rien décider sur ce point avant d'en avoir votre jugement, que je suis très empressé à vous demander. Au reste, lorsque le temps t aura une valeur assez grande, les termes qui ne sont pas multipliés par t s'évanouiront auprès de ceux de leurs semblables qui le sont; on trouvera dans ce cas la formule

$$z = \varphi(p) + \varphi(q) - \frac{\sqrt{c}\,t}{2}\sqrt{\varphi'^2(p) - \varphi'^2(q)} - c\frac{\sqrt{c}\,t^3}{2.4.3}\sqrt{\left[\frac{\partial\varphi'(p)}{\partial p}\right]^2 - \left[\frac{\partial\varphi'(q)}{\partial q}\right]^2} - c^3\frac{\sqrt{c}\,t^3}{2.4.16.9.3}\sqrt{} \quad \dots$$

A l'égard de la formule pour la propagation sphérique, elle est si compliquée que ce n'est pas la peine de la transcrire ici.

J'ai l'honneur d'être, avec une parfaite considération et un entier dévouement,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

De la Grange.

16.

LAGRANGE A EULER.

A Turin, ce 14 juin 1760 (1).

Monsieur,

Voici le second Volume des *Mélanges* de notre Société que le Roi a bien voulu honorer du titre de *Société Royale*. Elle m'a chargé de vous l'envoyer, et de vous prier de l'accepter comme un tribut qu'elle vous doit et qu'elle est bien glorieuse de vous devoir. Comme j'ai quelque part à cet Ouvrage, je vous prie encore, Monsieur, de me permettre de vous le présenter comme un témoignage du respect et de l'attachement avec lequel je suis et je serai toute ma vie, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

De la Grange.

A Monsieur Euler, Directeur de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.

17.

EULER A LAGRANGE.

Berlin, 24 juin 1760 (2).

Monsieur,

Je suis bien flatté de l'approbation dont votre illustre Académie, et

(1) *Lettres inédites*, p. 45.
(2) Ms. f° 16. — *Opera postuma*, t. II, p. 561.