feceris, si hac de re quid sentias ejus me participem feceris, et præsertim, an, præter Mechanicam, theoriam musicam (1), solutionem isoperimetrici problematis (2), et introductionem in infinitorum analysin (3), alia in lucem edideris; mitto enim, quæ Actis Academiæ Petropolitanæ et Berolinensis inserta reperiuntur: et præcipue eximium circa fluxum et refluxum maris calculum, hæc enim mihi fere omnia probe nota sunt. Haberem fortassis alia tibi mittenda, ac imprimis problema unum totam gnomonicam pro superficiebus quibuscunque, formulis duabus algebraicis, complectens, ex doctrina de superficiebus erutum; observationesque nonnullas circa maxima et minima, quæ in naturæ actionibus, insunt; verum ne majorem amplius molestiam, satietatemque tibi afferam epistolæ hujus meæ finem imponam. Vale.

De celeberrimo Wuolfii obitu velim me certiorem facias (4).

2.

LAGRANGE A EULER.

Die 12 augusti [1755] (5).

Vir amplissime atque celeberrime,

Meditanti mihi assidue, præteritis diebus, præclarissimum librum tuum de methodo maximorum et minimorum ad lineas curvas applicata (6), factum tandem est, ut, quod jamdudum mihi erat in deside-

(1) *Tentamen novæ theoriæ musicæ*. Pétersbourg, 1739, in-4°.

(2) *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*, t. VI, année 1739 des *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg*.

(3) *Introductio in Analysin infinitorum*. Lausanne, 1748, in-4°.

(4) Le célèbre philosophe, Jean Chrétien, baron de Wolf, qui était aussi mathématicien, né à Breslau le 24 janvier 1679, mort à Halle le 9 avril 1754. Si, comme cela est fort probable, le bruit de sa mort était fondé, la question adressée à Euler nous donne la date de cette lettre qui ne porte pas la mention de l'année.

(5) *Lettres inédites*, p. 9.

(6) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausanne et Genève, 1744, in-4°.

ratis, inciderim in viam aliam longe breviorem problemata hujuscemodi resolvendi, seu formulas tuas, absque omni lineari constructione, demonstrandi; quum eam igitur, ob simplicitatem suam tibi omnino non displicituram putaverim, ut pote qui similem fortassis jam exoptasse mihi visus sis in p. 39, Cap II ejusdem libri; ubi ais : *Desideratur itaque methodus a resolutione geometrica et lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimique, loco* P *dp*, *scribi oportere* — *p d*P (¹); hoc mihi nunc sumere ausus sum, ut illius te participem facerem, ratus quidquid temeritatis, et arrogantiæ in hac parte commissum fuisset, id a te omne pro summa tua humanitate facile condonatum iri. Quanquam enim merito hæsitandum fuerat, an mihi, qui obscuri adhuc nominis sum, te tantum vivum, omni pene scientiarum genere clarissimum, interpellare liceret, maximus tamen ac plane singularis affectus meus in te ex operum tuorum studio jampridem conceptus effecit, ut opportunam hanc illius tibi quomodocunque testandi occasionem, quam vehementissime exoptabam, de manibus dimittere nullo modo potuerim. Noli igitur, vir nobilissime, meam hanc, qualiscunque ea sit, audaciam graviter ferre; ea enim non aliunde certe, quam ex ardentissimo, quo teneor desiderio, in humillimorum cultorum tuorum numerum ingrediendi, proficiscitur. Interim, dum me gratiæ tuæ ac benevolentiæ devote commendo, te summopere rogatum cupio, ut quid de hac tenui mea re ingenue sentias, ejus me participem reddendi gratiam mihi facere velis; hoc enim in omnium, quæ tibi jam debere agnosco cumulum certe accedet. Vale, et fave

Amplitudinis tuæ cultori devotissimo et indefesso

LUDOVICO DE LA GRANGE TOURNIER.

Tuas ad me literas, quo facilius promptiusque mihi reddantur rectius facies si ita inscribes : *A M. Durand, banquier, pour remettre s. l. p. à M. Louis de la Grange.*

(¹) C'est à la page 56 de l'édition de 1744. Je ne sais s'il y en a une autre avant 1755.

Prænotanda.

I. Differentiale ipsius y quatenus hic differentiatur, x manente, pro habendo maximo, minimóve formulæ datæ valore, ad distinctionem aliarum ejusdem y differentiarum, quæ in illa jam ingrediuntur, denotabo per δ; sic et $\delta\, dy$ est differentia ipsius dy, dum y crescunt quantitate δy; idem dic generaliter de valore $\delta\,\mathrm{F}(y)$ [$\mathrm{F}(y)$ mihi est functio quæcumque y].

II. Ex dissertatione tua de infinitis curvis ejusdem generis (*Comm. Acad. Petrop.* anno 1734 inserta) (1) sub initium facile colligatur fore semper

$$\delta d\,\mathrm{F}(y) = d\delta\,\mathrm{F}(y) \quad \text{et generaliter} \quad \delta d^m\,\mathrm{F}(y) = d^m\delta\,\mathrm{F}(y);$$

unde et

$$\delta\, d^m y = d^m \delta y.$$

III. Ex calculo differentialium patet esse

1° $$\int z\,du = zu - \int u\,dz;$$

2° $$\int z\,d^2u = z\,du - u\,dz + \int u\,d^2z;$$

3° $$\int z\,d^3u = z\,d^2u - dz\,du + u\,d^2z - \int u\,d^3z;$$

et sic de cæteris.

IV. Similiter ex eodem evidens est

$$\int u \int z = \int u \times \int z - \int z \int u;$$

unde si $\int u$, posito $x = a$ (u enim et z sunt functiones x et y), fiat $=\mathrm{H}$, et $\mathrm{H} - \int u = \mathrm{V}$ erit item posito $x = a$

$$\int u \int z = \int \mathrm{V} z.$$

(1) *De infinitis curvis ejusdem generis : seu methodus inveniendi æquationes pro infinitis curvis ejusdem generis*, Commentarii, années 1734-1735, t. VIII, 1740, p. 174 et 184.

Problemata.

Invenire æquationem inter x et y, ut pro dato ipsius x valore puta $x = a$, formula hæc $\int Z$ maximum minimumve valorem obtineat.

Resolutiones.

Sit 1°

$$\delta Z = N\,\delta y + P\,\delta dy + Q\,\delta d^2 y + R\,\delta d^3 y + \ldots$$

(x enim in hac differentia ponitur constans § I). Igitur quoniam differentia duorum totorum æqualis est summæ differentiarum omnium partium, adeoque $\delta \int Z = \int \delta Z$, erit

$$\begin{aligned}\delta \int Z &= \int N\,\delta y + \int P\,\delta dy + \int Q\,\delta d^2 y + \ldots \\ &= \int N\,\delta y + \int P\,d\delta y + \int Q\,d^2\delta y + \ldots \quad (\text{§ II}) \\ &= \int N\,\delta y + P\,\delta y - \int dP\,\delta y + Q\,d\delta y - dQ\,\delta y + \int d^2 Q\,\delta y \ldots \quad (\text{§ III})\end{aligned}$$

unde

$$\delta \int Z = \int (N - dP + d^2 Q - \ldots)\delta y + (P - dQ + \ldots)\delta y + (Q - \ldots)d\delta y + \ldots$$

seu, ponendo y, qui respondet $x = a$, cum nonnullis sequentibus invariabilem, unde totidem habentur puncta per quæ curva invenienda transire debet, erit $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, $d^2\delta y = 0, \ldots$, unde tandem

$$\delta \int Z = \int (N - dP + d^2 Q - d^3 R \ldots)\,\delta y;$$

adeoque ex methodo maximorum, et minimorum communi

$$N - dP + d^2 Q - d^3 R \ldots = 0,$$

dabit æquationem quæsitam (9).

Sit 2°

$$\delta Z = L\,\delta\pi + N\,\delta y + P\,\delta dy + Q\,\delta d^2 y + \ldots; \qquad \pi = \int (Z);$$

et

$$\delta(Z) = (N)\,\delta y + (P)\,\delta dy + (Q)\,\delta d^2 y + \ldots$$

unde

$$\delta\pi = \int (N)\,\delta y + \int (P)\,\delta dy + \ldots$$

adeoque

$$\partial \int Z = \int N\,\partial y + \int P\, d\partial y + \int Q\, d^2\partial y + \ldots$$
$$+ \int L \int (N)\,\partial y + \int L \int (P)\, d\partial y + \ldots .$$

Sit $\int L$, posito $x = a$, $= H$ et $H - \int L = V$; erit per § IV

$$\partial \int Z \,(\text{posito } x = a)$$
$$= \int [N + (N)V]\,\partial y + \int [P + (P)V]\, d\partial y + \int [Q + (Q)V]\, d^2\partial y \ldots,$$

unde, ut supra, erit pro maximo minimove,

$$N + (N)V - d[P + (P)V] + d^2[Q + (Q)V] - \ldots = 0.$$

Eodem modo operandum pro formula prop. IV, Cap. III; et in universum quæcumque et quotcunque integralia involvantur; hujus itaque analysin brevitatis gratia omitto; et progrediar ad formulam prop. V ejusdem Cap., quæ mira facilitate etiam resolvitur.

Sit 3°

$$\partial Z = L\,\partial\pi + N\,\partial y + P\,\partial dy + Q\,\partial d^2 y + \ldots,$$
$$\pi = \int (Z); \qquad \partial(Z) = (L)\,\partial\pi + (N)\,\partial y + (P)\,\partial dy + \ldots,$$

seu, eliminando (z),

$$d\partial\pi = (L)\,\partial\pi + (N)\,\partial y + (P)\, d\partial y + \ldots;$$

sit, brevitatis gratia,

$$(N)\,\partial y + (P)\, d\partial y + \ldots = V,$$

erit æqualis

$$d\partial\pi - (L)\,\partial\pi = V;$$

unde per regulas cognitas integrando habebimus

$$\partial\pi = e^{\int (L)} \int V e^{-\int (L)}$$

unde fiet

$$\partial \int Z = \int N\,\partial y + \int P\, d\partial y + \ldots$$
$$+ \int e^{\int (L)} L \int e^{-\int (L)} (N)\,\partial y + \int e^{\int (L)} L \int e^{-\int (L)} (P)\,\partial y + \ldots;$$

quapropter, si $\int e^{\int (L)} L$, posito $x = a$, abeat in H, et $H - \int e^{\int (L)} L$ in V, habebimus operando ut supra

$$N + (N)e^{-\int (L)} V - d[P + (P)e^{-\int (L)} V] + \ldots = 0,$$

seu, ponendo $e^{-\int(1)}V = S$, erit

$$N + (N)S - d[P + (P)S] + d^2[Q + (Q)S] - \ldots = o;$$

similiter invenio etiam æquationem pro habendo maximo minimove, si pro $\delta\pi$ loco superioris æquationis

$$d\,\delta\pi = (L)\,\delta\pi + (N)\,\delta y + (P)\,d\,\delta y + \ldots$$

habeatur hæc alia

$$d^2\delta\pi = (k)\,d\,\delta\pi + (L)\,\delta\pi + (N)\,\delta y + (P)\,d\delta y + \ldots$$

quod usu venire potest in quærenda brachistochrona in hypothesi, quod corpus urgeatur perpetuo versus datum centrum virium mobile, aliis in casibus bene multis. Et generaliter hæc methodus succedit, cujuscunque ordinis differentialia ipsius $\delta\pi$ in ejus æquatione contineantur.

Scholion.

Quod supra in problem. I ut et in cæteris aliis posuerim δy, $d\,\delta y \ldots = o$, idem ut, ibidem innui, ex eo factum est, quod ut data consideraverim plura curvæ puncta; ita ut y, y', y'', ... pro constantibus fuerint habendi; verum si, exempli gratia, in casu primo unicum tantum detur punctum; adeoque una applicata, seu y tantum haberi debeat pro constante, hinc fiet quidem $\delta y = o$ sed non $d\delta y = o$; unde ponendum erit $= o$ ejus coefficiens seu $Q - \ldots$, ex quo habebitur determinatio unius constantis; hic enim, ut patet, in $Q - \ldots$ ponitur $x = a$; si nullum vero punctum daretur præter $Q - \ldots$ etiam $P - dQ + \ldots$ æquandum esset nihilo; unde duarum haberentur constantium determinationes. Atque hoc, in cæteris problematibus, idem dicendum. Cæterum aliquando evenit, ut non puncta, sed aliæ determinationes habeantur, ut in quærenda curva citissimi appulsus ad rectam positione datam; his, et similibus casibus, artificio quodam simplicissimo uno, eodemque calculo non solum speciem, sed et individuitatem curvæ quesitæ invenio; ut in hoc exemplo calculus mihi statim ostendit, eam esse illam cycloidem, quæ datam rectam ad angulos rectos secet.

Non omittendum quod calculum hunc ad superficies etiam maximi minimique proprietate quapiam præditas inveniendas eadem facilitate et universalitate applicuerim, quod etsi jam a quopiam fuerit præstitum, intelligere vehementer gauderem.

3.

EULER A LAGRANGE.

Berolini, die 6 sept. 1755 (1).

VIR PRÆSTANTISSIME ATQUE EXCELLENTISSIME,

Perlectis tuis postremis litteris, quibus Theoriam maximorum ac minimorum ad summum fere perfectionis fastigium erexisse videris, eximiam ingenii tui sagacitatem satis admirari non possum. Cum enim non solum in Tractatu meo de hoc argumento (2) methodum mere analyticam desideravissem, qua regulæ ibi traditæ erui possent, sed etiam deinceps non parum studii in hujusmodi methodo detegenda consumpsissem, maximo sane gaudio me affecisti, quod tuas profundissimas æque ac solidissimas meditationes super his rebus mecum benevole communicare voluisti; quamobrem tibi me maxime obstrictum agnosco. Statim autem perspexi analysin tuam, qua meas hujusmodi problematum solutiones per sola analyseos præcepta elicuisse multo latius patere mea methodo ideis geometricis innixa. In universa enim serie valorum ipsius y, qui singulis valoribus ipsius x respondent, donec x dato valori a æquetur, ego unicam valorem ipsius y data quadam particula δy augeri concepi, indeque incrementum in formula integrali $\int z\,\delta x$ ortum investigari, dum tu, vir clarissime, singulas valores ipsius y

(1) Mss. t. IV, f° 4. Le troisième feuillet est en partie déchiré. — *Leonardi Euleri opera postuma*. Petropoli, 1862, in-4°, t. I, p. 555.

(2) C'est le Traité : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, cité plus haut, p. 138, note 6.