LETTRE XI.

Sommaire. Continuation sur le problème de mécanique d'Euler, résolu dans la lettre précédente. — Rapport entre ce problème et le principe de la conservation des forces vives. — Théorème de mécanique, proposé par J. B., et critique d'une démonstration indirecte qu'en a donnée Daniel. — Solution du problème de König et différence entre celui-ci et celui d'Euler. Explication du non-accord qui existe dans la manière d'envisager la nature de la rétroaction des fluides d'Euler et de J. B.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo, Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Dab. Basil. a. d. 27. Aug. 1742.

Jam propemodum quadrimestre effluxit ex quo ultimas Tuas litteras accepi, quo tempore misere cruciabar consuetis meis doloribus, praesertim ex asthmate et tussi pertinacissima oriundis; affixus lecto sat longo tempore opem medici adhibui, quod non statim facere soleo nisi summa necessitas urgeat. Ordinaria senectutis incommoda, a quibus nunquam liber sum, non multum curo, neque adeo inutilibus meis querelis aures Tuas perpetuo obtundere volo, quare etiam ex silentio meo non recte concludis valetudinem meam esse corroboratam; Te vero in aetatis flore viventem velit Deus conservare per longam annorum seriem, quod votum esse debet omnium quibus cordi est rei mathematicae propagatio.

Speramus hic Russiae Imperatricem id facturam propediem, ut restituatur Academia Petropolitana in pristinum splendorem, siquidem Illa voluerit Magni Parentis vestigia sequi ejusque laudabilem intentionem exequi. Speramus pariter fore ut Monarcha vester, cui nunc addictus es, post pacem tam gloriose confectam cum Regina Hungariae, jam cogitaturus sit serio de Musarum castris amplificandis in sua Ditione: Nullus dubito quin Tu inter primos sis eorum, qui Illius munificentiam sunt experturi.

Nolo mordicus affirmare nullum errorem irrepsisse in calculum, quem institui pro solutione Tui problematis de motu determinando tum globi gravis, tum tubi intra quem ille descendit; puto autem methodum meam esse bonam: Interim rem gratam faceres si velles examinare quae dedi in *Postscripto* anterioris meae epistolae pro determinatione coordinatarum curvae, quam pondus in tubo descendens describit, quod ut commodius fiat, lubet exprimere vires acceleratrices, tam horizontalem quam verticalem, per solas litteras in ipso contextu epistolae adhibitas, ubi nimirum $p =$ massae globi gravis in tubo descendentis, $q =$ massae corporis affixi extremitati tubi, $a =$ longitudini tubi seu radio circuli, quem corpus q describit, $x =$ sinui anguli, quem facit quaelibet positio tubi cum linea horizontali per punctum fixum, circa quod rotatur tubus, transeunte, $y =$ distantiae globi a centro in quolibet situ tubi; praeterea $g =$ vi acceleratrici gravitatis naturalis, tandemque $t =$ cosinui $= \sqrt{(aa - xx)}$. Dico, si analysis mea rite se habet, fore curvam quam describit globus in tubo talem, quam describeret libere in vacuo corpus aliquod per se non grave, sed quod sollicitaretur a duabus viribus acceleratricibus, una in directione horizontali, altera in directione verticali, quarum illa horizontalis $\frac{gqtx}{qaa+pyy}$, altera vero verticalis $= g - \frac{gqtt}{qaa+pyy}$ seu $= \frac{gqxx+gpyy}{qaa+pyy}$; Hinc omnia reliqua fluunt; Nam vis acceleratrix in ipsa curva, quam globus descendens describit $=$

$$\frac{g\sqrt{[qqttxx+qqx^4+2pqyyxx+ppy^4]}}{qaa+pyy} = \frac{g\sqrt{(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{qaa+pyy}$$

adeoque posito elemento curvae $= ds$, erit globi gravis descendentis in tubo quadratum velocitatis actualis in directione elementi

$$2g\int\frac{ds\sqrt{(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{qaa+pyy};$$

Est autem $ds = \frac{1}{t}\sqrt{(ttdy^2+yydx^2)}$, hoc itaque valore substituto, erit quadratum hujus velocitatis

$$= 2g\int\left[\frac{\sqrt{(ttdy^2+yydx^2).(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{t(qaa+pyy)}\right].$$

Porro ds^2 seu $\frac{ttdy^2+yydx^2}{tt}$ se habet ad $\frac{aadx^2}{tt}$, hoc est quadratum elementi curvae a pondere p descriptae ad quadratum elementi arcus circularis descripti a corpore non gravi q, erit ut quadratum velocitatis actualis ponderis p ad quadratum velocitatis actualis corporis q, quia nempe haec duo elementa eodem tempusculo percurruntur; ex quo habetur quadratum velocitatis actualis corporis $q =$

$$\frac{2gaadx^2}{ttdy^2+yydx^2}\cdot\int\left[\frac{\sqrt{(ttdy^2+yydx^2).(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{t(qaa+pyy)}\right].$$

Simili modo inveniretur, si opus esset, velocitas ponderis p non actualis, sed quae concipitur in directione tubi; superest denique ut determinetur natura curvae, quam pondus p actu describit, id est, ut determinetur relatio inter x et y per convenientem aequationem, haec autem obtinetur, si ex viribus acceleratricibus collateralibus supra inventis

$$\frac{gqtx}{qaa+pyy} \text{ et } \frac{gqxx+gpyy}{qaa+pyy}$$

quaerantur quadrata velocitatum tam in directione horizontali quam in directione verticali: Quadratum nempe velocitatis horizontalis erit ad quadratum velocitatis verticalis ut

$$\int\frac{qtx(tdy+ydt)}{qaa+pyy} \text{ ad } \int\frac{(qxx+pyy)(xdy+ydx)}{qaa+pyy}.$$

Quoniam igitur elementa coordinatarum curvae simul percurruntur, erunt eorum quadrata ut velocitatum quadrata, hoc est, $(tdy+ydt)^2 \cdot (xdy+ydx)^2 ::$

$$\int\frac{qtx(tdy+ydt)}{qaa+pyy} \cdot \int\frac{(qxx+pyy)(xdy+ydx)}{qaa+pyy}$$

unde haec oritur aequatio $(tdy+ydt)^2 \int\frac{(qxx+pyy)(xdy+ydx)}{qaa+pyy}$

$$= (xdy+ydx)^2 \int\frac{qtx(tdy+ydt)}{qaa+pyy}$$

ubi tantum sunt indeterminatae x et y, nam tertia $t = \sqrt{(aa-xx)}$ non est nova indeterminata*).

Quousque jam haec conspirent cum conservatione virium vivarum examinare non vacat; Hoc negotium Tibi relinquo, Vir Exc., qui in calculando polles majori facilitate et patientia: interim haud aegre perspicio ex solo hoc principio conservationis virium vivarum problema istud solvi non posse, in quo quippe principio non continentur sufficientia data, nisi aliunde petatur aliquod in auxilium quod sit specificum. Permitte nunc quaeso, ut vicissim proponam aliquam quaestionem ex dynamicis: Finge Tibi corpus aliquod datae figurae positum esse super plano horizontali perfecte polito, ita ut

---

*) Observo nunc quae in his paginis continentur, potuisse simplicius exprimi, sed diutius immorari me taedet.

sine ulla frictione super illo plano moveri possit; Concipe jam applicari ad hoc corpus movendum aliquam vim motricem in directione horizontali, quae si transeat per centrum gravitatis corporis, manifestum est corpus acquirere motum sibi in cunctis partibus parallelum: Quodsi vero directio impulsionis non transeat per centrum gravitatis, acquiret corpus motum rotatorium circa punctum aliquod, quod perseverabit in quiete, saltem ab initio, quod ideo vocare soleo *centrum rotationis spontaneum*; hoc centrum (ut Tibi sine dubio et forsan paucis aliis jam notum est) idem erit cum centro oscillationis, quod existit in recta per centrum gravitatis normaliter ducta ad lineam directionis potentiae propellentis, sumendo scilicet punctum, in quo ista normalis secet lineam directionis, pro puncto suspensionis, et corpus ipsum ex eo suspensum pro pendulo, vel vicissim hoc pro illo. Quaero itaque an habeas hujus theorematis demonstrationem directam, quae nempe deducta sit ex solis principiis dynamicis seu mechanicis, qualem ego possideo omni exceptione majorem; Filius meus Daniel habet quidem demonstrationem (quam et ego facile inveneram), sed est indirecta, petita ex principio metaphysico de Natura per viam simplicissimam operante, supponit enim centrum spontaneum rotationis eo in loco esse debere, circa quod a vi minima possibili corpus rotari possit eadem cum velocitate angulari; sed hoc est confugere ad causam finalem, quam saniores physici, ut nosti, proscriptam volunt ex Philosophia naturali; nec male, quid si enim in aliquo phaenomeno explicando duae se offerrent praerogativae, quae autem simul a natura observari non possent, quamnam ergo ex illis affectaret natura? quomodo ejus intentionem divinare possemus, praesertim si ambae praerogativae suam peculiarem utilitatem haberent in aequali gradu? quae si ita se habeant, non dubito Te in meam sententiam iturum ac proin inquisiturum in demonstrationem directam ex legibus mechanicis necessario fluentem pulcherrimi hujus theorematis: Si consueta Tua sagacitas aliquam suggesserit, rogo ut mecum illam communices, ex cujus collatione cum mea, ubi videro consensum, maxima mihi creabitur voluptas. Ecce, ut Te invitem ad officii paritatem, mitto hic Tibi apographum solutionis meae problematis Koenigiani, quam olim dederam, gallice conscriptam, ipsi Proponenti ejusque Condiscipulis Maupertuis et Clairaut; videtur multum affinitatis habere cum Tua, cui autem cum non adjeceris analysin, melius ipse examinabis, quam ego, utrum ambae inter se sint consentaneae, de quo quidem non dubito; Interim non video quid hujus problematis solutio contribuat ad solutionem alterius problematis a Te propositi de globo gravi in tubo descendente: Etenim nihil fere commune habent, nisi quod in utroque casu globi moveantur in tubis, ast ingens est discrimen in essentialibus, nam 1° in Koenigiano nulla est consideratio gravitatis; in Tuo gravitas sola motum moderatur; 2° in illo circulatio tubi supponitur uniformis et a motore externo producta; in altero tubi circulatio est inaequabilis et accelerata; 3° in illo, motus globi dependet a motu tubi, in altero vice versa, motus tubi, quem ego sine pondere et sine materia considero, dependet a motu globi gravitantis super tubum.

Natura retroactionis fluidorum varios admittit conceptus, qui nisi probe discernantur, facile in errorem deducunt, quare non miror Te, Vir Excell., qui ipse fateris quod hac de re non multum sis meditatus, adhuc discrepare a mea sententia, quam tandem amplexus sum post longam atque maturam omnium circumstantiarum considerationem: mihi quidem ab initio idem accidit, quod nunc Tibi, ut crederem attendendum esse ad vim compressionis (nominatam π in dissertatione mea hydraulica), qua strata liquoris constipantur quando fluit ex locis amplioribus in angustiora, sed postmodum animadverti has vires premere quidem latera canalis, facereque ut liquor ascendat in fistula aliquo in loco canalis inserta et verticaliter erecta, nihil autem omnino conferre ad retroactionem; nam cum liquor in canali horizontaliter sito sit quasi gravitatis expers, evidens sane est omnes istas vires comprimentes aliasque liquorem protrudentes, quae in canali generantur, eminenter jam contineri in sola illa vi, qua liquor ex vase per primam amplitudinem (quam vocavi m) in canalem ingredi cogitur; verum demonstravi (Te approbante) vim illam aequivalere ponderi cylindri liquoris, cujus basis est m et altitudo a liquoris in vase amplitudini m superincumbentis, quod pondus expressi per gam. Haec igitur vis premens vel urgens dum agit antrorsum, simul etiam agit retrorsum, sed ea tantum ejus pars sumenda est pro retroactione, quae nullam invenit resistentiam in exitu per foramen w, reliquum enim utrinque aequaliter agendo antrorsum et retrorsum in aequilibrio manet; Et sic vis retroactionis aequalis erit gaw, hoc est, ponderi cylindri liquoris altitudinis a super basi w. Caeterum non capio, quid Tibi velis, Vir Cl., quando dicis „Experimenta docuisse, pressionem aquae contra fundum vasis primo effluxus momento quasi esse nullam:“ Concipe ergo vas cylindricum perquam magnae amplitudinis et altitudinis, aqua plenum, et finge in imo hujus vasis prope fundum aperiri foramen quantumvis exiguum, per quod aqua effluere incipiat; Potuissem ne eo absurditatis procedere, ut dicerem secundum theoriam meam aquae gravitationem seu pressionem in fundum subito cessaturam esse, cum potius contrarium dixerim.

Antequam finiam, hoc adhuc dicere lubet de problemate Tuo ponderis p in tubo descendentis; Si nimirum corpus q in extremitate tubi abesset, ipseque tubus nullam haberet quantitatem sensibilem materiae respectu ejus, quae est in pondere p, descenderet utique hoc pondus in linea recta verticali: Quid si autem in tubo plura essent pondera p aequalia sive inaequalia in diversis distantiis a centro rotationis tubi; In hoc casu, quantum per transennam video, commune centrum gravitatis ponderum p describet rectam verticalem, ipsa vero singula p describent totidem conchoides, quarum illa verticalis erit communis asymtotus, earumque communis umbilicus in ipso centro rotationis. Vale, Vir Excell., et me ama.

(Solution du problème de Koenig, par Jean Bernoulli, annexée à la lettre précédente).

Lemme. Si d'un point C (fig. 1.) l'on tire les droites CA, CB, CD qui coupent sur PD les parties AB, BD, infiniment petites et égales, la différence des angles ACB et BCD, c'est-à-dire, $ACB - BCD = \frac{2ps\,ds^2}{(pp+ss)^2}$, en nommant la constante $CP = p$ perpendiculaire sur la droite variable $PA = s$; Cela se démontre facilement en différentiant l'angle ACB dans la supposition de ds constante.

Problème. Déterminer la courbe que décrit un corps renfermé dans un tuyau, pendant que le tuyau se meut uniformément autour d'un centre sur un plan horizontal.

Soit (fig. 2.) la courbe ABE que décrit le corps pendant que le tujau CA tourne sur le point C. Soit $CA = x$, $AB = ds$, BH ou $Bh = dy$. Lorsque le corps a décrit la petite ligne AB dans un certain tems, s'il était libre, il continuerait à se mouvoir dans la même direction et parcourrerait, dans un tems égal, une autre partie $BD = AB$: Mais à cause que le tuyau se meut et se trouve dans le même tems dans la situation CE, qui fait avec CB l'angle $ECB = BCA$, le corps, au lieu d'être en D, sera en E, à même distance du centre que le point D.

Ayant donc décrit du centre C l'arc DE, et tiré sur les deux tangentes BP, ER, les perpendiculaires CP, CR, l'on aura, par le lemme, la différence entre les angles ACB et BCD, en substituant, dans $\frac{2psds^2}{(pp+ss)^2}$, $\frac{xdy}{ds}$ pour p, et $\frac{xdx}{ds}$ pour s, et l'on aura $BCA - BCD = \frac{2dydx}{xx}$. Maintenant $\frac{RQ}{QB} = \frac{DF}{BF}$, c'est-à-dire $\frac{d\left(\frac{xdy}{ds}\right)}{\frac{xdx}{ds}} = \frac{DF}{ds}$, donc $DF = \frac{ds^2 . d\left(\frac{xdy}{ds}\right)}{xdx}$, et à cause des triangles semblables HDB, FDE:

$$dx\ ds :: \frac{ds^2 . d . \left(\frac{xdy}{ds}\right)}{xdx} . DE = \frac{ds^3 . d . \left(\frac{xdy}{ds}\right)}{xdx^2};$$

Donc $\frac{DE}{EC} = \frac{ds^2 d(xdy)}{xxdx^2} =$ l'angle DCE, savoir, en prenant maintenant ds pour constante.

Or cet angle DCE est évidemment $=$ à l'angle ECB ou $BCA - DCB$. Donc $\frac{ds^2 d(xdy)}{xxdx^2} = \frac{2dydx}{xx}$; ou

$$(dx^2 + dy^2)(dxdy + xddy) = 2dydx^3,$$

$$\text{ou } xdx^2ddy + xdy^2ddy = dydx^3 - dxdy^3.$$

Retranchant du premier membre, et rajoutant après $2xdy^2ddy$, l'on a $xdx^2ddy - xdy^2ddy + 2xdy^2ddy = dydx(dx^2 - dy^2)$, c'est-à-dire $xddy(dx^2 - dy^2) + 2xdy^2ddy = dydx(dx^2 - dy^2)$; Donc $xddy + \frac{2xdy^2ddy}{dx^2 - dy^2} = dydx$, ou $\frac{ddy}{dy} + \frac{2dyddy}{dx^2 - dy^2} = \frac{dx}{x}$, ou (mettant pour $dx^2 - dy^2$ sa valeur $ds^2 - 2dy^2$)

$$\frac{ddy}{dy} + \frac{2dyddy}{ds^2 - 2dy^2} = \frac{dx}{x},$$

et intégrant, $l(ndy) - \frac{1}{2}l(ds^2 - 2dy^2) = lx$, ce qui donne $\frac{ndy}{\sqrt{(dx^2 - dy^2)}} = x$, d'où l'on tire $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(nn + xx)}}$ ou, rapportant les dy à une circonférence dont le rayon CM a, et $MN = dz$, l'on aura enfin $dz = \frac{adx}{\sqrt{(nn + xx)}}$.

Construction de la courbe. Faisant $a = 1$, l'équation précédente se réduit à $z = l(x + \sqrt{(nn + xx)})$, et prenant c tel que $lc = 1$, l'on a $c^z = x + \sqrt{(nn + xx)}$, ou $c^z - x = \sqrt{(nn + xx)}$, d'où l'on tire $x = \frac{c^z - nnc^{-z}}{2}$. Ayant donc (fig. 3) décrit la spirale logarithmique HGK semirectangle, et du même centre C et du rayon $CK = 1$ le cercle KMN, nommant $CG = x$ et l'arc $KM = z$, on prendra de part et d'autre du point K les arcs KM, Km égaux, et l'on aura $CG = c^z$ et $Cg = c^{-z}$. Retranchant donc de CG une partie $GO = nnCg$, on partagera CO en deux également au point B qui sera à la courbe cherchée ABE.