

LETTRE VIII.

SOMMAIRE. Jugement flatteur d'Euler sur les Recherches hydrauliques. — Détermination de la force rétroactive de l'eau qui coule d'un vase par un canal horizontal. — Non-accord entre les résultats de Jean et de Daniel B. — Euler est prié de rectifier quelques passages des Recherches hydrauliques. — Intégration de la formule $x^x dx$, pour le cas de $x=1$ et d'une autre qui s'y rapporte. — Encore sur l'intégration de l'équation différentielle des lettres précédentes et réflexions qui s'y rattachent. — Invitation qu'a reçue Euler de la part du roi de Prusse, Frédéric II. — Protestations d'amitié.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo LEONHARDO
EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Jam duo elapsi sunt menses et amplius cum ad me perferrentur litterae Tuae novissimae, quo ipso tempore in lecto decubui misere laborans doloribus podagricis, chiragricis, ut et tussi asperrima, asthmate aliisque sytmatibus, praesertim quadam paralysi, quae manum dextram ita corripuit ut per plures hebdomadas calamo ad scribendum uti non potuerim, imo ne nunc quidem possim expedite exarare litteras quas non tam scribo quam pingo, ob vehementem

manus tremorem, jam a longo tempore me infestantem atque indies ingravescentem; talia sunt senectutis incommoda, a quibus curari posse nulla spes affulget. Sed ne Te molestem importunis meis querelis, festino, at lente, ad litterarum Tuarum contenta:

Vix credideris, Vir Excell., quanto me gaudio perfuderit elogium quo decorare voluisti meditationes meas hydraulicas, a Te enim laudari, qui omnium es perspicacissimus simul etiam iudex integerrimus, potiori mihi duco honori quam si a mille aliis laudarer; inserviet mihi iudicium Tuum, tanquam omni exceptione majus, contra quosvis cavillatores, sive sint invidi sive ignari; facile enim percipis, non defuturos, praesertim in Anglia, qui more suo extenuabunt inventum non aliam ob causam quam quia debetur extraneo. Interim probe observasti ἀβλεψίαν meam, in determinanda vi retroactionis aquae ex vase per canalem horizontalem erumpentis; notasti quoque, uti decet, lapsum illum meum plane non promanasse ex fundamentis meae theoriae, sed tantum ex ejusdem perversa applicatione per meram inadvertentiam facta: En hujus rei originem. Cum in describendo alteram partem Hydraulicae meae pervenissem ad hunc locum, ubi de vi retroactionis ago, de qua materia ne cogitaveram quidem adhuc, ex improvise contigit ut inciderem in quasdam litteras veteres Filii mei, ubi praeter expectationem inveni aliquas formulas (sed sine analysi vel demonstratione) expositas; curiosus itaque videndi an respondeant principiis a me positis, festinanter feci calculum, quo tempore vestigia theoriae meae fere jam erant in ideis meis oblitterata, quod ob memoriae labilitatem hac qua sum aetate saepissime mihi accidit; unde factum est ut putarem quemadmodum aqua erumpens, ex vase per orificium in tubum primum, suam

*

exerit vim in latus vasis tubo oppositum, ita quoque considerandam esse vim retrougentem aquae transeuntis ex quolibet tubo per foramen suum in tubum proxime sequentem, quod autem nunc video verum non esse, quia illa vis quaelibet sustinetur vel potius absorbetur ab aqua jugiter pone sequente, adeo ut illa vis omnis jam contineatur in vi primitiva, quacum ex vase ipso in tubum primum pellitur et quae in latus oppositum vasis retroagit; sed quod incautus neglexi hoc fuit, quod debebam sumere vim aquae prementem fundum vel laminam perforatam, cum transit ex quolibet tubo in sequentem contiguum; hinc patet omnes istas vires, utpote antrorsum agentes, debere subtrahi a vi illa primitiva retrougente, adeoque residuum tantum dare veram et absolutam vim qua vas retropellitur; proin tantum abest, ut quemadmodum putāram augeatur vis illa primitiva a multitudine tuborum adaptatorum in amplitudine decrescentium, ut potius diminuatur eadem prout numerus tuborum crescit, decrescentibus amplitudinibus. Haec est rei gestae narratio: Cur autem mentionem fecerim Filii mei a me abludentis, id factum est, quia credebam ipsius solutionem a mea discrepantem extare in sua Hydrodynamica, atque ideo absurdum fore si silentio praeterirem, quando videret publicum nos esse in contradictoriis. Rogaris ergo, Vir Clariss., ut supprimas in scripto meo transmissio quatuor articulos erroneos, nimirum art. 28, 29, 30 et 31 una cum duobus subjunctis corollariis, eorumque loco substituas totidem alios in separata charta Tibi transmittendos. Videbis nunc me conspirare cum Filio pro casu unius tubi in § 28 explicatō, ut et quod attinet ad duos tubos vasi adaptandos, qui casus est § 29, ubi pariter non est dissensus inter nos; unum tamen credere me facit, Filium ipsummet suo solvendi

modo non satisfactum esse, quia non video causam cur de tribus tubis pluribusve numero determinatis nihil omnino dixerit, totamque istam materiam in opere suo hydrodynamico omiserit. Quod dedit de numero infinito tuborum seu de canali conoidico decurtato, qui casus est facilis, mecum convenit.

Pergo, Vir Excel., ad reliqua epistolae tuae capita: Accepi tandem nuper per manus Filii libros inter quos inveni quoque Musicam Tuam, pro qua, si missa est ex Tua liberalitate, debitas refero gratias. Legam eam quam primum licuerit per valetudinem. Optarim vero ut quae imposterum mittenda sunt, non per mercatores sed alia via commodiori transmittantur; hi enim lucripeti homines, qui nil faciunt nisi quaestus gratia, tot sumtus exigunt variis sub titulis, ut dubitem an non exsuperaturi essent pretium quod valerent libri ipsi si in auctione aliqua statim divendi deberent. Fortassis melius et promptius Tubingam dirigerentur, ut olim jam factum memini, ad Clar. Bullfingerum, qui a nobis non plus peteret quam quod ipse erogaturus esset.

Ob distractiones alienas viresque ex morbo adhucdum prostratas non licet profundius tentare jam serierum materiam, in quibus tanquam in elemento Tuo versaris felicissime; habeo interim de quo mihi gratulor, videns inventa mea olim facta Tibi saepissime ansam dare eruendi exquisitissimas veritates, aliaque producendi inventa ex meis deducta; inter talia refero quae nunc habes de sequestrandis integralibus imaginariis a realibus, quae utique omnia fluunt ex eo, quod expressiones quadraturae circuli reduci possunt ad logarithmos imaginarios et vicissim, quod me primum patefecisse, et quidem jam ab initio hujus saeculi, ingenue agnoscis. Tale quid etiam est, quod jam in superiori saeculo dedi pro integratione $\int x^x dx$ in casu quo $x = 1$, eo artificio usus ut

ex logarithmo ipsius x^x , nempe ex $x \log x$, iterum formare, regrediendo ad numerum, valorem ipsius x^x per seriem.

$$1 + \frac{x \log x}{1} + \frac{x x (\log x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3 (\log x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

quod usque adeo placuit Klingenstiernio, professori mathe-
seos Upsaliensi, ut sciscitaturus originem meae seriei

$$\int x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.},$$

casu $x=1$, quam suo Marte nullatenus invenire poterat, praecipue hunc in finem iter ad me fecerit, per 6 menses postea commoratus, mea institutione usus. Miror vero quod dicis, Vir Celeb., Te *ingenti* labore elicuisse methodum eam inveniendi, cum tamen ego non magnum laborem adhibuerim pro isto negotio, ut vidisti ex methodo mea quam demum A. 1737 publicavi, postquam fere per 40 annos eam suppresseram. Lemma illud pro inveniendo valore ipsius $\int x^m dx (\log x)^n$, quod dicis in subsidium vocasse, jam tum temporis mihi innotuisse, cum solutionem ipsam integrationis formulae $\int x^x dx$ adinveni, facile percipis siquidem unum sine altero vix fieri potest: cujus rei ut Tibi fidem faciam, transcribam quod in schedula scriptum inveni inter chartas meas antiquas; calculus est brevis et perfacilis atque methodus similis illi per quam inveni seriem meam universalem pro integrando $\int n dz$ quam dedi in Actis Lips. 1694 ni fallor. Ecce ergo retentis meis symbolis integrationem formulae $\int x^p dx (\log x)^q$, ubi p et q idem sunt quod apud Te m et n . Operatio est ut sequitur:

$$\begin{aligned} \int x^p dx (\log x)^q &= \frac{1}{p+1} x^{p+1} \cdot \log x^q - \frac{1}{(p+1)^2} x^{p+1} q \log x^{q-1} + \\ &+ \frac{1}{(p+1)^3} x^{p+1} \cdot q-1 \cdot q \cdot \log x^{q-2} - \frac{1}{(p+1)^4} x^{p+1} \cdot q-2 \cdot q-1 \cdot q \log x^{q-3} + \\ &+ \frac{1}{(p+1)^5} x^{p+1} \cdot q-3 \cdot q-2 \cdot q-1 \cdot q \log x^{q-4} - \dots \\ &+ \frac{1}{(p+1)^{q+1}} x^{p+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots q. \end{aligned}$$

Nota. Si numerus terminorum, seu $q+1$, est par, finietur progressio signo —, sin vero $q+1$ sit impar, finietur signo +.

Coroll. In casu, quo x evadit = 1, evanescent omnes termini excepto solo ultimo, singuli enim, in quibus est lx ejusque aliqua potestas, aequantur zero ex natura logarithmorum, nam exponens q supponitur affirmativus; adeoque erit in hoc casu

$$\int x^p dx lx^q = \frac{+1}{(p+1)^{q+1}} x^{p+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots q = \frac{+1}{(p+1)^{q+1}} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots q$$

Vides expressionem meam ante tot annos inventam Tuae quidem omnino esse consentaneam, sed non notasti quod requiratur meum q vel Tuum n debere esse affirmativum: Dubito an inveniri possit formula aliqua pro casu in quo q vel n esset negativum. Inveni quidem hanc aliam seriem

$$\int x^p dx (lx)^q = x^{p+1} \left(\frac{1}{1+q} (lx)^{1+q} - \frac{p+1}{1+q \cdot 2+q} (lx)^{2+q} + \frac{(p+1)^2}{1+q \cdot 2+q \cdot 3+q} (lx)^{3+q} - \frac{(p+1)^3}{1+q \cdot 2+q \cdot 3+q \cdot 4+q} (lx)^{4+q} + \dots \right)$$

quae pro negativo q aequae valet ac pro affirmativo, mutando tantum signa ante q posita. Sed nihil inde in rem nostram haecenus elicere potui.

Quod attinet ad methodum meam integrandi hanc aequationem $0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bd^2y}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.}$, non amplius scio an dixeris eam non satis esse generalem, de hoc vero non agebatur, nam ipsemet ego dubitavi de ejus legitima generalitate, siquidem pro fundamento posui curvam satisficientem esse ex classe Logarithmicarum, cujus subtangens tantum quaerenda sit, etiamsi nondum pro demonstrato habuerim, imo ne nunc quidem habeam, nullam curvam ex alio curvarum genere dabilem esse, quae forsitan etiam respondeat propositae aequationi. At vero scandalum mihi facesserat (hinc enim oborta est nostra controversia) quod in aliqua Tua anteriori epistola dixisti aequationem alge-

braicam, ad quam ego etiam dudum perveneram, $p^4 + k^4 = 0$,
 resolvi in has duas aequationes duarum dimensionum reales:
 $pp + kp\sqrt{2} + kk = 0$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk = 0$. Ad quod
 ego respondi, has quantitates esse quidem factores reales, in
 quos altera illa $p^4 + k^4 = 0$ resolvi potest, quod jam olim
 demonstratum dedi Taylora, sed illos factores utut reales non
 tamen posse esse aequationes reales, hoc est, non posse habere
 radices reales, adeoque impossibile esse ut $pp \pm kp\sqrt{2} + kk$
 fieri possit = zero; fortassis autem mentem Tuam non sa-
 tis clare expressisti. Caeterum facile concipio, quomodo
 ex logarithmis imaginariis perveniri possit ad valores reales
 per quadraturam circuli exprimendos, et qui ignorare pos-
 sem, cum primus hanc materiam in scenam produxerim.
 Cavendum interim suspicor ne quod hic de imaginariis
 primi gradus intelligitur idem extendi debeat ad imagina-
 ria altiorum graduum, dubito, inquam, an si reperiretur
 $y = e^{+x\sqrt{b}-1} + e^{-x\sqrt{b}-1}$, idem reduci posset ad quadraturam
 circuli realem.

Audivi cum voluptate, Te, Vir Celeb., invitatum esse no-
 mine Regis Borussiae ad novam Academiam Berolini stabi-
 liendam, imo Te jamjam acceptasse invitationem, de quo
 honore Tibi ex animo gratulor; Velit Deus secundare Tua
 coepta atque Te comitari in itinere, jam proximo, ut in-
 telligo, mense Junii suscipiendo: Rogo ut mihi scribas quan-
 tum Tibi promissum sit salarium annuum. Etiam ego et
 ambo mei Filii accepimus litteras invitatorias jussu regio,
 sed mihi grandior est aetas et valetudo nimis vacillans, quam
 ut possim, quemadmodum optarem, auscultare tam honorifi-
 cae atque illecebrosae ablectationi. Si vicenis annis junior
 essem, mehercle, ne per momentum quidem cunctarer; mihi

adeo sordent omnia in Patria. Quid consilii capturis sint Filii mei, nondum scio; expectabunt credo significationem magis praecisam conditionum offerendarum, id quod fiet, si conjectare licet, finita expeditione in Silesiam suscepta. Quando veneris Berolinum, habebimus Te multo viciniorem, quod me sperare facit, Te aliquando ad Patrios Lares expansiaturum, salutandorum Parentum gratia, quo ipso Tui videndi copia mihi daretur, quod vehementer desidero priusquam morior: Interim Vale, Vir Amicissime, et me amare perge. Dabam Basileae d. 18. Febr. st. n. 1741.

P. S. Sicuti scribis, pars prior hydraulicorum meorum jam erit impressa in IX Comment. tomo; pars altera sine dubio typis mandabitur pro tomo X. Sed cura quaeso ut correcte prodeat atque immunis a vitiis typographicis, quod monere necesse duco, quia vidi in tomo V exercitationem meam de triangulo retrocedente a pressione ponderis, hypotenusae impositi, tot scaterere erroribus a typhotheta commissis, ut ipse me vix cognoscere potuerim vel cogitata mea intelligere. Imprimis optarim ut figurae, Hydraulicae meae inservientes, a chalcographo caelentur cum aliqua venustatis gratia, quales ego exprimere non potui, quia nunquam didici delineandi artem, et omnes tremula manu, ut cunque potui, in chartam conjeci: Ad hoc autem opus erit ut Tu, Vir Excell., vel alius quispiam harum rerum peritus explicet chalcographo quid in singulis locis observandum sit ad res ipsas menti meae convenientes nitide probeque repraesentandas.

Hasce jam scriptas dimissurus eram mense Februario, Vir Celeb., cum nuncius paulo ante ad nos deferretur de

descensu Tuo, tanquam proxime instanti, id quod fecit, ut retinuerim donec scirem adventum Tuum Berolinum, veritus ne Te non amplius inveniant Petropoli, quanquam ut nunc video sat temporis ante abitum Tuum superfuisset quo meas litteras (si misissem) ibi adhuc accipere potuisses; mitto tamen nunc, etsi sero, ne responsione careat ad Tuas anteriores: Rogo ut schediasma adjectum quantocius Petropolin transmittas, spero enim satis mature illuc venire posse, ut inseri queat parti secundae Hydraulicae meae, antequam tomus X Comment. eousque impressus sit. Caeterum jucundissimum fuit intelligere ex novissimis Tuis litteris Berolini datis et nudius tertius acceptis, Te una cum Tua familia felicissime adventasse in locum novae Tuae stationis, de quo Tibi gratulor voveoque ut omnia Tibi ex animi sententia eveniant: Gratulor et mihi Te nobis viciniorem factum, indeque spem affulgere futurum ut aliquando huc excurras ad salutandum Parentes et Amicos, quod ut fiat ante meam mortem est quod ardentissime desidero. Non possum satis admirari excessum Tuae erga me benevolentiae, videns Tibi res meas usque adeo cordi esse, ut ultro et non rogatus easdem deferri curaveris ad Illustrissimum Comitem Ostermannum, quam in partem quoque adduxisti, sicuti ais, Clariss. Prof. et Consiliarium Grossium, qui hoc onus in se suscepturum promiserit. Nihil jam reliquum est hac vice, quam ut Te, Amice exoptatissime, quamvis absentem, animo exosculer, donec id, si Superis placet, coram facere possim. Vale, iterumque vale. Basil. a. d. 1. Sept. 1741.
