25.

EULER A LAGRANGE.

Saint-Pétersbourg, ce $\frac{9}{20}$ mars 1770 [1].

Monsieur et très honoré Confrère,

Votre prompte réponse sur les remarques que j'avais eu l'honneur de vous communiquer m'a causé bien du plaisir, et je vous en suis infiniment obligé. Je me suis fait lire toutes les opérations que vous avez faites sur la formule $101 = p^2 - 13q^2$ et je suis entièrement convaincu de leur solidité; mais, étant hors d'état de lire ou d'écrire moi-même, je dois vous avouer que mon imagination n'a pas été capable de saisir le fondement de toutes les déductions que vous avez été obligé de faire et encore moins de fixer dans mon esprit la signification de toutes les lettres que vous y avez introduites. Il est bien vrai que de semblables recherches ont fait autrefois mes délices et m'ont coûté bien du temps; mais à présent je ne saurais plus entreprendre que celles que je suis capable de développer dans ma tête et souvent je suis obligé de recourir à un ami pour exécuter les calculs que mon imagination projette.

Pour ce qui regarde le problème de deux nombres dont le produit, étant tant augmenté que diminué de leurs sommes aussi bien que de leurs différences, produise des carrés, il m'a été autrefois proposé par un certain capitaine, M. de Kappe, qui me dit l'avoir reçu d'un ami de Leipzig, qui s'était longtemps inutilement occupé à en trouver une solution, et que lui-même y avait épuisé toutes ses forces sans aucun fruit. Il m'a donc demandé si je croyais ce problème possible ou non. Je lui répondis d'abord que ce problème me paraissait d'une nature singulière et surpassait même les règles connues de l'analyse de Diophante; en quoi je ne crois pas m'être trompé. Cependant, après quelques

[1] Ms. f° 30. — *Opera postuma*, t. I, p. 574.

essais, j'ai trouvé la solution que j'ai eu l'honneur de vous communiquer, et je croyais presque que c'était l'unique qu'on serait en état de donner. Mais, depuis que j'ai eu l'honneur de vous écrire, ayant fixé encore mes recherches sur ce problème, j'ai découvert une route qui en fournit une infinité de solutions. Voilà de quelle manière je m'y suis pris. Posant les deux nombres cherchés A et B, les premiers efforts fournissent d'abord ces formules

$$\mathrm{A} = \frac{(p^2+s^2)(q^2+r^2)}{4pqrs} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \frac{(p^2+s^2)(q^2+r^2)}{(p^2-s^2)(q^2-r^2)},$$

mais il est nécessaire que cette formule $\frac{(p^2+s^2)(q^2+r^2)}{2pqrs(p^2-s^2)(q^2-r^2)}$ devienne un carré, ce qui est, sans doute, extrêmement difficile et au-dessus de la méthode ordinaire de Diophante. Mais, ayant employé les substitutions suivantes

$$p = m^2 + (m-n)^2, \qquad q = m^2 + mn - n^2 = s \quad \text{et} \quad r = m(m - rn),$$

cette formule, après en avoir ôté les facteurs carrés, se réduit à celle-ci

$$\frac{5m^2 - 6m^2 + 2n^2}{2n(2m+n)},$$

qu'il est aisé de rendre carrée; car, posant $n = 2m - l$, cette formule devient

$$\frac{m^2 - 2ml + 2l^2}{(4m-2l)(4m-l)},$$

dont le numérateur multiplié par le dénominateur donne ce produit

$$16m^4 - 44m^3l + 58m^2l^2 - 28ml^3 + 4l^4,$$

qui doit être un carré et dont la résolution est fort aisée. Quoique cette solution paraisse fort particulière, vu que, au lieu de quatre lettres p, q, r, s, cette formule n'en contient que deux, j'ai lieu de croire qu'elle renferme pourtant toutes les solutions possibles.

Je serais fort curieux, Monsieur, d'apprendre votre sentiment sur les deux théorèmes suivants, que je crois vrais sans les pouvoir démontrer :

1° *Outre le cercle, il n'y a point d'autres courbes algébriques dont chaque arc soit égal à un arc de cercle.*

2° *Il n'y a point de courbes algébriques non plus, dont chaque arc soit égal à un logarithme.*

Vous voyez bien qu'il ne s'agit pas ici des courbes algébriques dont la rectification dépende ou des arcs de cercle ou des logarithmes.

Je reviens au problème dont je vous ai aussi parlé dans ma Lettre précédente, où il s'agit de déterminer les trois quantités x, y et z par les deux variables t et u; en sorte que, posant

$$dx = l\,dt + \lambda\,du, \qquad dy = m\,dt + \mu\,du, \qquad dz = n\,dt + \nu\,du,$$

les trois conditions suivantes soient remplies :

1° $$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$
2° $$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$
3° $$l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

dont j'avais bien trouvé une solution complète, mais par une méthode extrêmement indirecte, et je croyais presque qu'il n'y avait point de méthode directe qui puisse conduire à la solution. Mais, afin que vous ne pensiez pas que c'est une pure et stérile spéculation, j'ai l'honneur de vous dire que le problème suivant m'y a conduit : *Trouver tous les solides dont la surface puisse être expliquée* (¹) *dans un plan*, comme il arrive dans tous les corps cylindriques et coniques. Or, depuis quelques jours, je suis tombé sur la solution suivante, qui me paraît assez directe : Introduisant une nouvelle variable ω, qu'on en cherche trois telles fonctions p, q et r en sorte que

1° $$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

et

2° $$dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\omega^2,$$

(¹) *Expliquer*, développer; *explicare*.

ce qui n'a aucune difficulté; ensuite, qu'on pose comme il suit

$$l = p\sin\omega + \frac{dp}{d\omega}\cos\omega, \qquad m = q\sin\omega + \frac{dq}{d\omega}\cos\omega, \qquad n = r\sin\omega + \frac{dr}{d\omega}\cos\omega,$$

$$\lambda = p\cos\omega - \frac{dp}{d\omega}\sin\omega, \qquad \mu = q\cos\omega - \frac{dq}{d\omega}\sin\omega, \qquad \nu = r\cos\omega - \frac{dr}{d\omega}\sin\omega,$$

et il est clair que les trois conditions prescrites sont remplies; il ne reste donc que de rendre intégrables les trois formules différentielles. Pour cet effet, je remarque que

$$\begin{aligned} dl &= d\omega\cos\omega\left(p + \frac{d^2p}{d\omega^2}\right), \\ dm &= d\omega\cos\omega\left(q + \frac{d^2q}{d\omega^2}\right), \\ dn &= d\omega\cos\omega\left(r + \frac{d^2r}{d\omega^2}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\lambda &= -d\omega\sin\omega\left(p + \frac{d^2p}{d\omega^2}\right), \\ d\mu &= -d\omega\sin\omega\left(q + \frac{d^2q}{d\omega^2}\right), \\ d\nu &= -d\omega\sin\omega\left(r + \frac{d^2r}{d\omega^2}\right), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{d\lambda}{dl} = \frac{d\mu}{dm} = \frac{d\nu}{dn} = -\operatorname{tang}\omega.$$

Maintenant transformons les formules proposées en cette sorte

$$\begin{aligned} x &= lt + \lambda u - \int(t\,dl + u\,d\lambda) = lt + \lambda u - \int(t - u\operatorname{tang}\omega)\,dl, \\ y &= mt + \mu u - \int(t\,dm + u\,d\mu) = mt + \mu u - \int(t - u\operatorname{tang}\omega)\,dm, \\ z &= nt + \nu u - \int(t\,dn + u\,d\nu) = nt + \nu u - \int(t - u\operatorname{tang}\omega)\,dn, \end{aligned}$$

où puisque l, m et n sont des fonctions de la seule variable ω, toutes ces trois formules deviendront intégrables en égalant la formule

$$t - u\operatorname{tang}\omega$$

à une fonction quelconque de ω, qui soit Ω; de là, on tire

$$t = \Omega + u\operatorname{tang}\omega,$$

de sorte que le calcul roulera à présent sur les deux variables u et ω, dont les coordonnées x, y et z deviendront certaines fonctions.

Permettez-moi, Monsieur, que je vous parle encore d'un problème qui me paraît fort curieux et digne de toute attention.

Dans un carré divisé en seize cases, il s'agit d'inscrire seize nombres

A	B	C	D
E	F	G	H
J	K	L	M
N	O	P	Q

dans ces cases, en sorte que premièrement les sommes des carrés de chacune des bandes horizontales, et ensuite aussi la somme des carrés pris par les bandes verticales, soient égales entre elles, et, outre cela aussi, la somme des carrés par les diagonales, ce qui donne déjà dix conditions à remplir; mais, outre cela, il faut encore remplir les conditions suivantes :

11° $\quad AE + BF + CG + DH = 0,$

12° $\quad AJ + BK + CL + DM = 0,$

. . . . ,

et, ainsi, joignant deux à deux des bandes horizontales, ce qui donne six conditions; enfin il faut aussi remplir celles-ci :

17° $\quad AB + EF + JK + NO = 0,$

18° $\quad AC + EG + JL + NP = 0,$

. . . .

en combinant deux à deux des bandes verticales, ce qui donne aussi six conditions, de sorte qu'il faut remplir en tout vingt-deux conditions différentes pendant qu'on n'a que seize quantités inconnues. Cependant, ce problème ne laisse pas d'être infiniment indéterminé, et j'ai réussi d'en trouver la solution en général, dont j'ajoute ici un exemple particulier.

+ 68	− 29	+ 41	− 37
− 17	+ 31	+ 79	+ 32
+ 59	+ 28	− 23	+ 61
− 11	− 77	+ 8	+ 49

Enfin, j'ai l'honneur d'être, avec la plus parfaite considération, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. Euler.

P. S. — Lorsque M. le Directeur (¹) voudra bien répondre à cette Lettre, on le prie de donner sa réponse ou au professeur Formey, ou de l'envoyer sous l'adresse du Secrétaire de l'Académie impériale des Sciences.

(Au bas du dernier feuillet, on lit : *Répondue,* de la main de Lagrange.)
Cette réponse manque.

26.

EULER A LAGRANGE.

Saint-Pétersbourg, ce $\frac{20}{31}$ mai 1771 (²).

Monsieur et très honoré Confrère,

Comme je suis hors d'état d'écrire moi-même, et que les occasions de me servir d'une autre main se présentent rarement, vous me par-

(¹) Lagrange était devenu directeur de la Classe de Mathématiques.
(²) Ms. f° 34. — *Opera postuma,* t. I, p. 577.