LETTRE X.

SOMMAIRE. Considérations sur les évènemens politiques en Russie et en Prusse et leur influence sur le sort des lettres et des arts. — Recherches sur la rétroaction des fluides. — Solution d'un problème de mécanique proposé par Euler, et d'un problème analogue proposé par König de Berne.

Viro Celeberrimo et Excellentissimo, LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Distuli aliquantisper responsionem ad litteras Tuas die 26. Decembris datas, ut parcerem sumtui utrinque faciendo si utendum fuisset cursori publico; meas enim litteras tanti non aestimo ut Tibi sint onerosae. Spero nuperam illam subitamque revolutionem in Imperio Russico obortam non fore damnosam Academiae Petropolitanae, scripsit namque Clairautius, academicus Parisiensis, meus quondam discipulus una cum Maupertuisio et Koenigio Bernensi, scripsit inquam ille, se audivisse ex ore Principis Cantemiri, legati Russici ad aulam Gallicam, quod nova Russorum Imperatrix sibi firmiter proposuerit omnia religiose exequi ac promovere quaecunque a Parente Petro Magno fuerint instituta ac prae caeteris quidem res academicas, quod si ita se habeat, ut verisimile est, non dubito quin mutatio ista rebus Tuis futura sit utilis potius quam noxia: quare expectandum erit donec fermentationes Imperii deferbuerint omniaque pervenerint ad tranquillitatis statum permanentem.

Magis anxius haereo circa tumultus turbulentos in Imperio Romano excitatos, qui non videntur tam promte sedari posse, ut Rex vester potentissimus, qui pro ardore suo heroico ipsis maxime implicitus est, cogitare queat de restauratione Academiae Regiae scientiarum hoc adhuc anno suscipienda, siquidem bellum undiquaque magis magisque exardescere audimus, quod si ita per totam pene Europam serpere pergit, nescio ubinam quaerendus sit pacificator, qui tantas possit componere lites. Interim optandum esset ut Heros vester pro prudentia sua minus se exponeret in vitae periculum quam facit cum praelio se committit; Quid si enim in periculo occumberet, bone Deus! Quis resurgeret scientiarum Patronus? Quis Academiam vestram restauraret? Quis item omnia, quae optimus Princeps in bonum publicum meditatus est, effectui daret aut dare posset? Haec utique maxima ex parte dependerent ab indole successoris; quis autem scit, an eodem animo futurus esset affectus erga scientias et artes, an simili amore esset prosecuturus Eruditos, aut annon potius relicturus esset in squalore et torpore culturam bonorum studiorum.

Sed pergo ad privata, quae nos propius tangunt: et quidem quod attinet ad Hydraulica nostra, deprehendi tandem totum negotium de retroactione fluidorum ex vase erumpentium esse perquam facile et ex eorum numero quae, cum sint nimis obvia et, ut ita dicam, ante pedes posita, praeterimus quasi laterent in recessibus longe remotis; Interim error meus, si unquam error est nominandus, non tam consistit in falso ratiocinio quam in sinistra idea sub qua rem ipsam aspiciebam: Nunc autem observo ex natura virium motricium omnium stratorum ad supremam aquae amplitudinem translatarum producere pressionem $= gha$, hoc est, $=$ ponderi columnae aqueae cujus basis est h seu suprema amplitudo, et altitudo vasis a; Hinc sequitur ex communi principio hydrostatico vim actionis, qua expellitur aqua per amplitudinem infimam, hoc est per orificium w, debere esse aequalem ponderi columnae aqueae, cujus altitudo eadem a sed amplitudo w, adeoque $=$ ponderi gwa. Cum autem pro vasis, quorum centricae habent situm verticalem, canales vero situm horizontalem, generaliter inventum sit

$$\frac{vv(hh-ww)}{2h} + \frac{hwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y} = gha$$

$=$ constanti pro vasis jugiter plenis, et cum praeterea vis reactionis in directione horizontali sit etiam constans nempe $= gwa$, erit haec $= \frac{vv(hhw-w^3)}{2hh} + \frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$; patet utique vim illam retroagendi constanter esse eandem a primo effluxus momento per omnia velocitatis incrementa usque ad maximam seu aequabilem velocitatem, utpote quae vis semper est $=$ ponderi cylindri gwa, neque paradoxum hoc videbitur esse illi, qui attenderit nihil impedire quominus crescente primo termino $\frac{vv(hhw-w^3)}{2hh}$, alter $\frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$ tantundem decrescat, et vice versa; Revera existente velocitate initiali, evanescet primus terminus, remanebitque alter $\frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$ qui solus invenietur $= gwa$, si substituatur valor ipsius dx, et vicissim, si velocitas v est maxima, terminus posterior $\frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$ evanescet, superstite priori $\frac{vv(hhw-w^3)}{2hh}$, cui soli tunc aequabitur gha. Quod si nullo influente in vas novo liquore, vas ipsum gradatim depleatur, perspicuum est retroactionem gradatim quoque imminui et ita quidem ut semper proportionalis sit altitudini aquae remanentis in vase, dicatur enim altitudo variabilis $= A$, eritque vis retroactionis $= gwA$.

Quae olim dedi pro determinatione descensus corporis gravis super plano inclinato mobili, bona quidem sunt, sed methodus, qua usus fueram in solutione per progressiones geometricas descendentes in infinitum, non satis est naturalis, neque adeo digna elogio sagacitatis, quo me pro urbanitate Tua eam ob rem mactare voluisti; inveni namque ex illo tempore citra hujusmodi progressiones alium solvendi modum magis naturalem et longius procedentem, cujus ope solvere potui sine magno labore novum problema, quod Tu, Vir Excell., mihi proponis in litteris Tuis, his verbis: „Sit „tubus seu canalis (sive gravis, sive gravitatis expers) mobilis „circa axem fixum, in quo versetur globus, qui ob gravita„tem in tubo sine frictione descendat (*et quidem, quod sine „dubio subintelligis, non rotando, sed fluendo*), simulque tubo, „motum inducat: quovis tempore determinare situm tubi et „globi in tubo, itemque utriusque celeritatem.“ Ponamus, brevitatis tantum gratia, casum simplicissimum: Sit scilicet tubus geometricus, hoc est, sine materia, sed materiae loco affixum sit in extremitate corpus q gravitatis expers, in altera vero extremitate sit axis, circa quem tubus est mobilis; In cavitate tubi concipiatur globus gravis cujus pondus sit p, a cujus magnitudine abstrahitur, vel potius cujus magnitudo ut infinite parva supponitur: effectus itaque hujus ponderis est duplex, nimirum in situ obliquo tubi, primo ut pondus descendat secundum longitudinem, seu directionem tubi, deinde ut ipsi tubo motum circa axem inducat, simulque adeo promoveat corpus q in extremitate tubi annexum; Proinde globus p ex duplici hoc motu acquiret per compositionem motum verum et realem, describetque eo lineam aliquam curvam, cujus natura exprimitur hac aequatione

$$\frac{dx^2}{aa-xx}\int x\,d\,y = p\,d\,y^2 \int\frac{y\,dx}{qaa+pyy};$$

Per a intelligo longitudinem tubi, restat ut explicem quid significent indeterminatae x et y: Per axem fixum esse ductam concipe rectam horizontalem, ad quam agatur porro recta verticalis ab extremitate canalis ubi est corpus q; quemcunque habeat situm canalis vel tubus, erit haec verticalis ea, quam voco x, distantia vero ponderis p in tubo ab axe fixo est y. Velocitates, quas in quocunque situ habent corpus q et pondus p, inveni ut sequitur: Posito scilicet g designare vim acceleratricem qua gravia animantur naturaliter ad descensum verticalem, erit quadratum velocitatis corporis q circa axem fixum $= 2\,g\,a\,p\int\frac{y\,dx}{q\,aa+pyy}$, quadratum velocitatis ponderis p in directione ipsius tubi $= \frac{2g}{a}\int x\,d\,y$, tandemque quadratum velocitatis actualis ponderis p in directione tangentis curvae quam describit $= \frac{aady^2 - xxdy^2 + yydx^2}{(aa-xx)dy^2} \cdot \frac{2g}{a}\int x\,d\,y$.

Si tubus ipse esset materialis, nullum vero corpus sibi annexum haberet, solutio non ideo foret difficilior; Sit enim quantitas materiae in eo uniformiter diffusa, quae dicatur r, dico eodem modo se rem habere, ac si tubus careret materia sed haberet in extremitate sibi annexum corpus $= \frac{1}{3}\,r$; Quod si tubus sit materialis et insuper habeat in extremitate annexum corpus q, hic casus considerari debet tanquam esset tubus immaterialis, sed qui haberet in extremitate annexum corpus $= q + \frac{1}{3}\,r$. Porro si quantitas materiae sit non uniformiter diffusa per longitudinem tubi, sed in data quacunque lege se habeat diffusio, poterit semper, concessa integrabilitate, res reduci ad suppositionem tubi immaterialis cum annexo corpore addendo ad corpus q. Ex. gr. procedant diffusiones materiae tubi transversim secti in ratione distantiarum y ab axe fixo, quo casu poterit substitui tubus immaterialis qui in extremitate annexum habeat corpus $= q + \frac{1}{2} r$, atque tunc omnia aequivalenter fient. Si diffusiones transversales materiae essent ut quadrata distantiarum ab axe fixo, haberetur tunc pro corpore annectendo $q + \frac{3}{8} r$. Et ita in aliis.

Quae scripsi in postremis hisce lineis vera sunt et certo vera, independenter ab ipsa solutione, quam dedi Tuì problematis, quod forsan non in eo sensu accepi, in quo ipse accipiendum voluisti. Hac occasione lubet mentionem facere ulterius alicujus problematis olim a Koenigio supra memorato mihi propositi, eo tempore, cum apud me essent bini ejus socii Maupertuisius et Clairautius, quod problema aliquam habet affinitatem cum Tuo, quamvis non interveniat consideratio gravitatis globi tubo inclusi, utpote motum acquirentis a circulatione tubi circa alterutram extremitatem uniformiter rotati in plano horizontali. Ecce ipsam propositionem gallice mihi factam: *Déterminer la courbe que décrit un corps renfermé dans un tuyau, pendant que le tuyau se meut uniformément autour d'un centre sur un plan horizontal.* Paulo post dederam solutionem satis elegantem una cum constructione concinna, quae supponit descriptam esse logarithmicam spiralem, cujus ope exhibui innumeras curvas quaesito satisfacientes, quas inter in casu quodam particulari existit ipsissima logarithmica. Non dubito, quin pro mira Tua dexteritate mox sis soluturus propositum. Vale, mi Charissime! et me, ut soles, amare perge. Dabam Basileae a. d. 15. Martii 1742.

P. S. Vides, Vir Excell., pro solutione Tui problematis me etiam esse deductum ad aequationes differentiales non satis commode tractabiles; unum est imprimis, quod mihi scrupulum facessit: an scilicet liceat assumere directiones mutabiles, in quibus quaesivi vires acceleratrices, ut est ea, quae generatur in corpore in tubo; dum tubus ipse mutat suam inclinationem, et dein altera vis acceleratrix, cujus directio priori est normalis, adeoque etiam mutabilis. Sed huic scrupulo medelam inveni, resolvendo scilicet utramque illarum virium in duas collaterales secundum directiones duas immutabiles, unam horizontalem, alteram verticalem, atque ita conjungendo utrobique duas horizontales, habeo vim acceleratricem, unam horizontalem, qua mobile in horizonte promovetur aut repellitur; conjungendo autem utrobique duas verticales, acquiro unam verticalem, qua idem mobile ad descensum verticalem animatur. Pono nunc coordinatas r et z curvae quaesitae, quam corpus grave p actualiter describit, nimirum r pro abscissa in recta horizontali per axem fixum transeunte, et z pro applicata verticali; quo posito inveni, salvo errore calculi, vim acceler. horiz. $= \frac{gqaarz}{(zz+rr).(pzz+prr+qaa)}$ et vim acceleratr. verticalem $= g - \frac{gqaarr}{(zz+rr.(pzz+prr+qaa)}$: Vocetur quantitas prior $= R$, et posterior $= Z$, eritque $2\int R\,dr =$ quadrato velocitatis accedendi vel recedendi in directione horizontali, et $2\int Z\,dz =$ quadrato velocitatis descendendi in directione verticali. Hinc ergo, quia dr et dz eodem tempusculo percurruntur, prodibit $\frac{dr^2}{\int R dr} = \frac{dz^2}{\int Z dz}$

pro natura curvae quaesitae, quam mobile grave p descendendo actu describit, hoc est,

$$dr^2 \int Z\,dz = dz^2 \int R\,dr.$$

Habetur quoque velocitas corporis q, est enim elementum curvae inventae ad elementum contemporaneum, quod percurrit corpus q in circumferentia circuli, ut velocitas illius ad velocitatem hujus. Ergo etc.