LETTRE VII.

Sommaire. Envoi de la seconde partie des Recherches hydrauliques. — Recherches ultérieures sur la sommation des séries, sur l'équation différentielle, traitée dans la lettre précédente, et sur le mouvement des corps flottans. — Réduction d'une équation différentielle du second ordre au premier, en sorte qu'elle devienne intégrable ou, du moins, constructible.

Viro Eximio atque Celeberrimo Leonhardo Eulero
S. P. D. Joh. Bernoulli.

Ut tandem promissi fidem liberem, ecce! Tibi partem alteram meditationum mearum hydraulicarum mitto; scriptura non admodum est nitida et figurae rudi omnino Minerva delineatae, omnia quippe tremente manu peracta: Res ipsa vero, ut spero, Tibi Tuoque judicio ideo non minus placebit. Methodum meam investigandi velocitates aquarum fluentium ita adornavi, ut esset generalissima, inserviens pro vasis et canalibus cujuscunque figurae atque modo quocunque inter se adaptatis. Abstinui in explicatione fundamentali ab idea gurgitis, ne scilicet Angli possent captare ansam confundendi gurgitem meum cum Newtoni catarracta, quasi ego illum ab hac mutuatus fuissem, etiamsi inter se toto coelo differant. Usum vero et actionem gurgitis involvi duobus principiis, *hydrostatico* uno, altero *hydraulico*, ex quorum debita combinatione tota mea theoria absolvitur; id cum ante me nemini in mentem venerit, mirum non est, quod pariter ante me nemo dederit veram et directam methodum determinandi velocitates fluidorum ex vasis et canalibus erumpentium: Tu, Vir Clar., primus fuisti, qui eo, quo polles, ingenii acumine, visis quae communicavi in prima scripti mei parte, statim eruisti solutionem velocitatis quaesitae fluidi ex quolibet vase prosilientis. Quod si nunc talia, hactenus tam densa caligine obsepta, nunc vero demum in lucem feliciter a me protracta, non mereantur, ut aliquando promissum obtineant honorarium annuum, certe non video quid sit in posterum mihi sperandum. — — — —

Transeo nunc ad jucundiora: Gratias ago pro communicatione methodi Tuae summandi hanc seriem:

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{4+n} + \frac{1}{9+n} + \frac{1}{16+n} + \text{etc.}$$

Intelligo quidem modum reducendi illam ad hanc formam: $1 \cdot \alpha \pi^2 - n \beta \pi^4 + n^2 \gamma \pi^6 - n^3 \delta \pi^8 + n^4 \varepsilon \pi^{10}$ — etc. sed non satis bene capio legem progressionis coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc.; quae enim disseris de eorum origine, obscura mihi sunt; aliquando Davus sum, non Oedipus, hoc praesertim tempore, quo praeter alia negotia, quibus distrahor, tam publica quam domestica, nunc ea accedunt, quae quotidie subnascuntur ex munere Decanatus oriunda, quod munus nuper meis ingratiis mihi fuit impositum, per integrum annum gerendum; unde vides attentionem, quae ad talia probe penetranda singulariter requiritur, saepissime interrumpi, id quod Tibi, qui hisce unice vacare potes, non aeque ac mihi contingit; adde incommoda senectutis meae, quae memoriam et attentionis facultatem mirum quantum debilitat.

Quod vero attinet ad rationem quam habet series

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$$

ad eandem, sed alternis signis sumtam:

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \text{etc.}$$

vidisti in praecedentibus meis litteris, quod dixi non esse difficile demonstratu, summam prioris esse ad summam alterius ut 2^n ad $2^n - 2$. Hoc quidem jam olim perscripseram Leibnitio, ante initium hujus saeculi, ut ex nostris litteris patet. Existente $n = 1$, oritur progressio harmonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.},$$

quae erit ad $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$ ut 2 ad 0; unde sequitur, progressionem harmonicam habere summam infinitam, quod alio modo ego olim, et postea Frater meus sed per ambages demonstrabamus, etsi veritas ejus tam facile ex ipsa ratione 2^n ad $2^n - 2$ fluat.

Placent quae habes de summis serierum

$$1 \pm \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} \pm \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \pm \frac{1}{6^6} + \text{etc.}$$

sed suspicor Te non alia methodo fuisse usum, quam quae ex mea derivata est, cujus specimen jam dedi in Actis Lipsiensibus anni 1697. Ipsam vero analysin exposui in iisdem Actis 1737, mense Februarii; ubi vidisti, fundamentum totius artificii in hoc consistere, ut ex dato quantitatis x^x logarithmo xlx per reversionem redeatur ad ipsam x^x, ope seriei notissimae, quae ex logarithmo dat numerum, ita ut sit

$$x^x = 1 + x\,l\,x + \frac{x^2\,lx^2}{2} + \frac{x^3\,lx^3}{2.3} + \frac{x^4\,lx^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Poteram utique, si vel tantillum attendissem, generalius ponere x^{mx}, vel etiam $x^{mx} \cdot x^n$, et tum utique, sequendo methodum meam, eadem facilitate invenissem, quod Tu nunc mihi proponis, nempe $\int x^{mx} x^n dx$, seu quod idem est: $\int x^{mx+n} dx = \frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+2)^2} + \frac{mm}{(n+3)^3} - \frac{m^3}{(n+4)^4} + \frac{m^4}{(n+5)^5} - \frac{m^5}{(n+6)^6} +$ etc., posito nempe post integrationem $x = 1$. Hinc nunc sponte fluit, quod tum temporis animadvertere negligebam, posito scilicet $m = -1$ et $n = 0$, proditurum esse

$$\int x^{-x} dx \text{ seu } \int \frac{dx}{x^x} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \text{etc.}$$

Vellem autem scire, an fortasse per aliam viam huc perveneris, quam per meam ipsam; nam si Tua non esset diversa a mea, certe nihil fecisses quam mihi reddere meum cum foenore. En nunc par pari refero, et foenus foenore: Sit integrandum $\int x^{mx^p} dx$ per seriem, ubi p est exponens constans ipsius x in exponente mx^p, dico fore

$$\int x^{mx^p} dx = x - \frac{m}{(p+1)^2} x^{p+1} + \frac{mm}{(2p+1)^3} x^{2p+1} - \frac{m^3}{(3p+1)^4} x^{3p+1} + \text{etc.}$$

Expressionem, quam aequivalere inveneram huic seriei:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{x},$$

dedi tantum pro theoremate, quod terminorum summam accurate exhibet, non tantum proxime, neque dedi pro compendio, quale Leibnitius a me petebat, sed, ut dixi, pro theoremate. Quod si vero duntaxat postuletur modus approximandi ad summam terminorum ad ingentem numerum continuatorum, mihi videtur id effici posse quodammodo simplicius quam mihi perscripsisti; ecce quo pacto procedo: Addantur actu, ut Tu facis, Vir Excell., aliquot termini primores, quorum numerus sit n, quo major autem est hic numerus, eo propius pervenietur ad desideratum. Sit igitur summa horum terminorum $= C$, dicaturque $x = n + y$, erunt termini reliqui summandi sequentes:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{n+y}.$$

Pono $dy=1$, ut scilicet exprimatur haec series per

$$\frac{dy}{n+1}+\frac{dy}{n+2}+\frac{dy}{n+3}+\frac{dy}{n+4}+\cdots+\frac{dy}{n+y},$$

cujus integrale, seu summa est $l(n+y)-ln$, qui duo logarithmi sumendi sunt in logarithmica, quae habet subtangentem $=$ unitati; ut autem accommodentur ad quam tabula logarithmorum Vlaccii supputata est, cujus subtangens est 4342945, erit summa terminorum post terminum $\frac{1}{n}$ subsequentium $\frac{l(n+y)-ln}{4342945}$, cui addatur summa terminorum praecedentium, actu sumta, quae supponitur $=C$, habebitur summa totius seriei $=\frac{l(n+y)-ln}{4342945}+C$.

Exemplum 1. Quod Tuum est: Proponatur series ad terminum millionesimum prolongata:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{1000000},$$

hoc est, sit $n+y=1000000$, sitque numerus terminorum praecedentium $n=10$, invenietur horum summa actu addendo, nempe $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{10}=\frac{7381}{2520}=C$. Item $l(n+y)=l\,1000000=6{,}0000000$, atque $ln=l10=1{,}0000000$, adeoque $l(n+y)-ln=5{,}0000000$, unde summa totius seriei, seu $\frac{l(n+y)-ln}{4342945}+C=\frac{50000000}{4342945}+\frac{7381}{2520}=14\frac{967235489}{2188844280}$, qui numerus tantillo major est quam Tuus $14\frac{392726722865723529}{1000000000000000000}$.

Exempl. 2. Esto numerus terminorum decem milliones: erit summa totius seriei $=\frac{60000000}{4342945}+\frac{7381}{2520}=16+\frac{967235489}{2188844280}+\frac{262822}{868589}=16\frac{3}{4}$ proxime.

Exempl. 3. Sit numerus terminorum centum milliones, erit summa totius seriei $= \frac{70000000}{4342945} + \frac{7381}{2520} = 18 + \frac{967235489}{2188844280} + \frac{525644}{868589} = 19$ quam proxime.

Coroll. Crescente numero terminorum per decuplum, crescet summa seriei per $2\,\frac{262822}{868589}$, hoc est fere per $2\frac{1}{3}$.

Scholion. Quo major sumitur numerus primorum terminorum actualiter summandorum et quo longius continuata supponitur tota series, eo propius ad verum accedet regula colligendi seriem totam in unam summam. Ratio hujus est evidens, quia, quo major est numerus n totusque $n+y$, eo magis considerari potest unitas tanquam dy, seu elementum ipsius $n+y$.

Miror Te nunc dicentem, Vir Clarissime, methodum meam, pro tractanda aequatione

$$o = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

fere congruere cum Tua, cum tamen antea illam tanquam non satis generalem (utpote ad solas logarithmicas sese extendentem) praedicaveris; Est ne forsan ejus rei ratio, quod me monente nunc demum intellexisti, Te perperam putasse quod aequationes duae $pp+kp\sqrt{2}+kk=0$ et $pp-kp\sqrt{2}+kk=0$, in quas resolvitur aequatio algebraica $p^4+k^4=0$, habeant radices duas ipsius k *reales*, cum tamen sint mere imaginariae, seu impossibiles? Hoc si supposuisti principium erroneum, oportet ut agnoscas, formulas illas, quas in anterioribus Tuis litteris mihi dedisti, non posse subsistere. Hoc unicum ergo sciscitor, an praeter meas logarithmicas habeas adhuc alias curvas possibiles, quae satisfaciant aequationi

$$o = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

an vero formulae illae Tuae, pro exemplo particulari

$$y + \frac{ed^4y}{dx^4} = 0$$

datae, sint erroneae? rogo ut cathegorice respondeas, sicuti decet inter amicos. Factores quidem sunt reales $pp + kp\sqrt{2} + kk$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk$, ex quibus componitur $p^4 + k^4$, sed non sunt aequationes reales, quia neutra habet radicem k possibilem. Quod spectat ad solutionem meam alterius aequationis differentialis gradus indefiniti

$$o = y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bxxddy}{dx^2} + \frac{cx^3d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

gaudeo illam Tibi perplacuisse, atque quaedam compendia suppeditasse. Interim parum refert, quod promiscue praebeat casus reales et imaginarios (debet utique omnes praebere) sed in potestate est secernere reales ab imaginariis, quod sufficit.

Non opus esse censeo ut serram diutius reciprocemus inutiliter disputando de motu oscillatorio corporum aquae innatantium; video enim alterum ab altero non intelligi, quamvis forsan ambo recte sentiamus. Non dixi considerandam esse rectam verticalem eam, quae transeat per centrum gravitatis *portionis corporis* aquae submersae, sed eam volui, quae transeat per centrum gravitatis, non quidem *portionis corporis*, sed *voluminis aquei*, quod portio ista occupat, et ita, ni fallor, locutus sum. Tu vero statuis rectam illam verticalem concipiendam esse tanquam transeuntem per centrum gravitatis *sectionis aquae*: interim quid, si ista duo centra essent in eadem recta verticali ex necessitate rei, foret utique nostra disputatio mera logomachia. Similiter dissentimus, uti videtur, tantum verbis, agentes de firmitate. Tu intelligis momentum ejusdem quam ego sumsi in sensu absoluto, haud aliter quam dicerem, vim firmitatis penduli simplicis ordinarii, oscillationes minimas facientis, esse ipsam fili tensionem, cujus vis aequalis est ipsi ponderi oscillanti et hac quidem vi, vel potius propter hanc vim affectat pendulum redire ad situm quietis, hoc est, ad situm verticalem, quod sufficit ad naturam firmitatis explicandam, etsi non improbam, pro accurata mensura habenda, vim illam multiplicari posse per arculum minimum, quem pondus excurrendo describit, ut ejus momentum prodeat.

Non me fugiebat, posse quidem aequationem secundi gradus $yx^2dx^2 + addy = 0$ reduci ad aequationem simpliciter differentialem; est enim ex earum numero, pro quarum reductione inveni jam diu regulam generalem, sed optabam talem, ut reducta esset integrabilis, vel saltem, concessa quadratura, construibilis; tali enim opus habebam ad certum aliquem scopum obtinendum.

Vale, Vir Excellentissime, meque porro ama. Dabam Basileae a. d. 31. Aug. 1740.