LETTRE VI.

SOMMAIRE. Plainte sur la nécessité dans laquelle se trouve l'auteur de copier lui-même ses travaux. — Continuation sur la sommation des séries et l'intégration des équations différentielles. — Continuation sur les oscillations horizontales des corps flottans. — Problème d'Hydrodynamique. — P. S. Promesse d'envoyer sous peu la seconde partie des Recherches hydrauliques. — L'équation $yxxdx^2 + addy = 0$ peut-elle être réduite aux différences premières, dx étant supposée constante.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo, LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Non ita facile eluctatus sum asperrimam hyemem, quin magnam ejus partem in lecto transigere coactus fuerim, vehementi laborans tussi, nec non asthmate et podagra, quibus malis, nondum omnino liberatus, non potui satis attente considerare cuncta, quae mihi perscripsisti, elegantissima atque ex profundissimo Tuo ingenio depromta, in litteris 19 Jan. sine dubio styli veteris, exaratis, in quibus inveneram alias ad Filium meum datas, quas sine mora ipsi transmisi. — — — Juvenis ille, quo usus fuerat Filius meus ad describendum suam dissertationem, nunc mortuus est ex febre ardente; sed etiam si adhuc viveret, non tamen possem ejus opera uti, neque cujusquam alius, ad describendas meas meditationes, quia soleo eas admodum confuse et abruptis verbis in chartam conjicere, atque tum demum inter describendum corrigere et in ordinem redigere; unde vides neminem alium, nisi memet ipsum, id operis suscipere posse et exequi. — —

Transeo nunc ad analytica Tua: Quae habes circa series hujusmodi: $\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} +$ etc. sapiunt certe singularem ingenii sagacitatem; animo quidem meo concepi quasdam vias, quibus ad earum summam eruendam in omni extensione pervenire liceat, sed quia praevideo, multum laboris et calculi requiri ad executionem, non audeo rem aggredi, aliis occupationibus distractissimus; malo igitur talia a Te discere, quando suo tempore evulgaveris, quam hisce diu insudare et fortassis sine successu.

Hac tamen occasione aliquid monebo: Non est difficile demonstratu, quod summa hujus seriei:

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

ubi termini omnes affirmativi sunt, sit ad summam ejusdem, sed signis terminorum alternative sumtis:

$$\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

ut se habet 2^n ad $2^n - 2$. Nosti vero procul dubio, me dedisse olim modum exprimendi hanc seriem:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \text{etc.},$$

per hanc quantitatem finitam: $\int x^x dx$, cui illa series est aequalis, quando nempe fit x aequalis unitati. Quaero nunc, an pariter invenire possis rationem, quam illa habet ad eandem seriem terminorum signis continuo affirmative procedentium:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

Memini Leibnitio, olim me roganti, an habeam compendium expedite summandi progressionem harmonicam

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots . \frac{1}{x}$$

ad terminos numero x continuatam, dedisse pro responso hoc, non quidem compendium, sed theorema, scilicet:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots . \frac{1}{x}$ erit $=$ huic alteri progressioni

$$x - \frac{x.x-1}{2.2} + \frac{x.x-1.x-2}{2.3.3} - \frac{x.x-1.x-2.x-3}{2.3.4.4}$$
$$+ \frac{x.x-1.x-2.x-3.x-4}{2.3.4.5.5} \ldots . \pm \frac{1}{x},$$

cujus termini nil aliud sunt quam coefficientes binomii ad numerum x elevati, dividendo singulos per respective numeros 2, 3, 4, 5 .... x. Ex. gratia

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

erit aequalis huic

$$5 - \frac{10}{2} + \frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5}.$$

Quod attinet ad methodum Tuam, Vir Excel., integrandi aequationes differentiales, quae hac forma generali continentur:

$$o = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

video ex paucis quae dicis, meam solutionem problematis Cotesiani a Tayloro propositi habere aliquid analogi cum Tua ipsa solutione, quamvis non attenderis ipse; nam quod ais, aequationem algebraicam $p^4 + k^4 = 0$ resolvi posse in factores reales hos duos: $pp + kp\sqrt{2} + kk$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk$, id ipsum est, quod ego jam dudum animadverti contra Taylorum, qui credidit haec nobis incognita fuisse, ideo, quia Leibnitius alicubi dixerat $\int dx : (x^4 + a^4)$ neque ad circuli neque ad hyperbolae quadraturam reduci posse. Respondi autem, Leibnitium hoc non asseverasse absolute, sed tantum relative ad methodum, qua usus fuerit in illo loco, ubi ita locutus est: „ego vero monstravi Tayloro, binomium x^4+a^4 revera resolvi posse in hos duos factores reales: $xx+ax\sqrt{2}+aa$ et $xx-ax\sqrt{2}+aa$, praeter duos alteros imaginarios $xx+aa\sqrt{-1}$ et $xx-aa\sqrt{-1}$." Inspice modo Acta Lips. Anni 1719 p. 257, ubi haec, quae dico, expressissimis verbis invenies, fluuntque ex fundamento totius meae solutionis problematis Cotesiani. Miror interim Te dicentem, aequationem algebraicam $p^4+k^4=0$ resolvi in *has duas aequationes* duarum dimensionum *reales* $p^2+kp\sqrt{2}+k^2=0$ et $p^2-kp\sqrt{2}+k^2=0$; debebas dicere: *resolvi in duos factores reales*, non vero in aequationes reales; nam $p^2\pm kp\sqrt{2}+k^2$ non possunt esse $=0$, alias foret radix $p=\mp k\sqrt{\frac{1}{2}}\pm k\sqrt{-\frac{1}{2}}=$ imaginario, ergo nullus casus datur, ubi fieri possit $p^2\pm kp\sqrt{2}+k^2=0$, hoc est, nulla relatio realis dabilis est inter p et k, ut inde formari queat $p^2\pm kp\sqrt{2}+k^2=0$, nisi velis utrumque p et k sumere $=0$, sed non est hic sensus verborum Tuorum.

Alteram, cujus mentionem facis, aequationem differentialem indefiniti gradus nimirum hanc:

$$o=y+\frac{axdy}{dx}+\frac{bxxddy}{dx^2}+\frac{cx^3d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$

posita ut supra dx constante, ego quoque jam ante initium hujus saeculi reduxi ad aequationem integralem finitam, quae quidem est generalis; sed fateor, in illa contineri mixtim tam reales quam non reales; interim possunt a se invicem distingui, ideoque non puto meam solutionem eandem esse cum Tua. Quidquid sit, exscribam meam methodum in Schedam separatam, quam examinare poteris, ex adversariis meis antiquis, ita tamen ut ad litteras Tuas, a, b, c etc., x et y accommodem scriptum meum.

Conspirant utique re ipsa nostrae duae solutiones de oscillationibus horizontalibus corporum aquae insidentium; sunt tamen quaedam monenda circa minus essentialia: Bene notas, quod et ego notaveram, eandem esse proprietatem rectae AB in suprema aquae sectione sumtae, sive dicatur esse $\int yydx = \int zzdx$, ut ego enunciavi, sive concipiatur AB, ut Tu fecisti, tanquam transiens per centrum gravitatis sectionis corporis in aquae superficie factae. Malebam autem rem ipsam exprimere per proprietatem pure geometricam, quam per mechanicam, eoque magis, quod hic superficies sola, in imaginatione tantum subsistens, nihilque materiae habens, non nisi improprie dici possit habere centrum gravitatis.

Secundo, Tecum non sentio, quod pace Tua dixerim, quando asseris, motum centri gravitatis totius navis, vel cujusque corporis innatantis, pendere a *distantia* rectae verticalis per centrum gravitatis *sectionis* aquae ductae, a recta verticali per centrum gravitatis totius corporis ducta; nam mihi clare videtur, considerari debere distantiam rectae verticalis per centrum gravitatis non sectionis aquae, sed (NB.) ipsius voluminis, quod corpus in aqua occupat, hujus, inquam *distantiam* a recta verticali per centrum gravitatis totius corporis ducta; etenim in centro voluminis (quod volumen inter oscillandum perpetuo ejusdem magnitudinis est supponendum) concentratur tota vis motrix, agens sursum verticaliter, ad restituendum corpus in situm pristinum quietis, quamdiu durant oscillationes: interim fateor, propter variabilitatem figurae voluminis, centrum ejus gravitatis non semper eundem locum occupare in corpore oscillante, sed hinc inde evagari in singulis oscillationibus ab uno latere in alterum respectu rectae lineae quae, dum corpus adhuc est in quiete, verticaliter transit per ejus centrum gravitatis.

Tertio non nego quod dicis, centrum gravitatis corporis totius oscillantis non manere omnino immotum; nam, secundum rigorem loquendo, revera mutat suum situm tam in directione horizontali quam verticali, magisque in illa quam in hac; sed cum supponantur oscillationes corporis totius quamminimae, hoc est quasi infinite parvae, potest demonstrari, mutationes illas centri gravitatis corporis, quas nominare vellem trepidationes, non tantum esse insensibiles, sed omnino infinities minores, quam sunt ipsae oscillationes minimae corporis ipsius, adeoque tuto negligendae, ut jam monui in praecedentibus meis litteris.

Quarto. In iisdem volebam sciscitari, sed quod dein obliviscebar, quid nempe intelligas proprie per vim firmitatis, de qua in litteris Tuis 30. Julii 1738 agis dicisque, quod sit illa quae resistit inclinationi corporis, eamque esse

$$= M\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right).$$

Si per vim firmitatis intellectam cupis vim illam, per quam corpus inter oscillandum continuo verticaliter sursum urgetur a pressione aquae, et quam vim dixi concipiendam esse tanquam concentratam in centro gravitatis voluminis aquae a corpore occupati, tunc credo, Te voluisse dicere hanc vim esse

$$= \frac{M}{GO}\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right),$$

omittendo per incuriam subjicere GO pro denominatore infra M; sic enim scribendum esse inveni ex mea solvendi methodo, in qua conjectura eo magis obfirmor, quod alioquin vis Tua firmitatis compararetur cum pondere M, multiplicato per lineam $GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}$, quae duo inter se sunt incomparabilia; talis autem incongruentia non reperitur in mea expressione, quippe in qua linea $GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}$, divisa per lineam GO, dat numerum, quisquis ille sit, qui indicat, quoties sumendum sit pondus M, ut fiat aequale vi firmitatis, vel, ut ego voco, vi motrici ex oscillatione oriundae et sursum tendenti; atque ita vis cum pondere comparatur, homogeneum cum homogeneo, quae utique non sunt asystata. Quod cum ita sit, judicandum relinquo, an vis Tua correcta

$$\frac{M}{GO}\left(GO + \frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}\right)$$

commode satis appellari possit *vis firmitatis reluctans inclinationi corporis*; ut enim proprie dici possit *vim vi resistere*, oportet sane alteram alteri esse directe oppositam: hic vero *vis firmitatis* dicta, habens directionem verticalem, alteri vi, quae corporis inclinationem molitur, et quae ideo agit secundum directionem horizontalem nullatenus resistere potest, etiamsi illa maxima esset, haec minima; haud secus ac videmus magnum pondus ex filo pendens dimoveri posse a situ verticali per vim quantumlibet exiguam a latere horizontali impingentem. Meo igitur judicio melius esset, *pro vi firmitatis* adhibere eandem quidem expressionem, sed multiplicatam per n seu per angulum inclinationis: inveni enim

$$\frac{n.M}{GO}\left(GO + \frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}\right)$$

esse vim motricem horizontalem, qua corpus inclinatum ad situm aequilibrii restituitur, proportionalem sane ipsi n, atque adeo etiam distantiae centri gravitatis voluminis a situ aequilibrii, uti requiritur in oscillationibus tautochronis. Quae in hac quarta annotatione dico exscripsi ex manuscripto, quod paravi circa hanc materiam juxta multa alia nova et curiosa ad dynamicam spectantia, quae aliquando, si otium daretur, in ordinem redigere et Vobiscum communicare possem.

Problemata illa duo de oscillationibus fluidorum, unum in vase quiescente, alterum in pelvi vel situla ex ansa suspensa reciprocante, quae inter scribendum mihi in mentem inciderunt ac Tibi proposui, statim post abitum litterarum mearum prorsus deserui atque neglexi, quia attentius rem considerans animadverti, problemata illa solvi non posse, nisi faciendo suppositiones quae mere sunt precariae nullumque habent fundamentum in ipsa rei natura, ita ut aliae atque aliae inde emergant solutiones, prout haec vel illa hypothesis adhibetur, dum interim una aeque ac altera eundem obtinet probabilitatis gradum. Sic Tuae solutiones videntur bonae et cum meis conspirantes; quia eadem generali hypothesi usi sumus, supponendo scilicet, in ejusmodi oscillationibus totam massam simul moveri, et quidem moveri certo modo, quod verum esse demonstrari nequit, propterea quod hoc pendeat a circumstantiis accessoriis, ex. gr. a quantitate fluidi, figura vasis, etc. Et vel hinc colligi potest, massam integram fluidi non semper in oscillationibus partium superiorum simul moveri, quod si vera sunt, quae legi et audivi, in maximis tempestatibus, cum suprema maris superficies vehementer agitetur et fluctuet, urinatores experiri tamen in profunditate 200 vel 300 pedum omnimodam aquaram tranquillitatem, imo se nullum plane motum sentire: unde praesumi potest, in nostris vasibus simile quid fieri, ut nempe superiores tantum partes in motum cieantur, reliquis inferioribus locum suum non mutantibus, cum praesertim superiorum motus sit tam languidus, tam placidus, ut non sit credibile, ab illis turbari posse situm inferiorum. Oporteret igitur prius inquirere, quousque se extendat superficies illa, quae separet partem aquae mobilis ab immobili, item quamnam habeat figuram illa superficies, et alia multa, quae vix definiri possunt a sagacitate humana. Adde quod in problemate secundo pelvis, scilicet ex unco pendentis et oscillantis, si ejus figura haberet ventrem tumidum et desineret superius in collum oblongum et angustum, ad cujus medium usque aqua pertingeret, annon facile percipimus, aquam cum vase et in vase sensibiliter haud aliter oscillaturum, quam si illa esset congelata et ita repraesentaret pendulum ordinarium. Ob has itaque multasque alias difficultates inseparabiles abstinui ab ulteriori scrutinio et animi applicatione tanquam frustanea. — — — Vale, Vir Excellentissime, atque mihi favere perge. Dabam Basileae a. d. 16 April. 1740.

P.S. Vides ex iis, quae ab initio hujus epistolae dixi, me ob valetudinem adversam non fuisse in statu absolvendi alteram partem meditationum mearum hydraulicarum; spero autem, nisi recidiva me capiat, tantum effici posse, ut prima vice, qua ad Te sum scripturus post acceptam responsionem sine longa mora transmittere queam in scripto partem secundam omnium quae circa hanc materiam a me dicendum restabant, quae quidem talia sunt ut ad multa plura detegenda viam pandant, Tibi praesertim, qui in sagacitate nullum parem habes. Potest ne reduci haec aequatio: $yxxdx^2 + addy = 0$ ad differentias primas? supponitur dx constans.