LETTRE XXVI.

SOMMAIRE. Descente d'un corps sur une courbe mobile horizontalement. Problème du mouvement d'un globe dans un tube. Deux démonstrations directes d'un théorème de mécanique. Mémoire sur la percussion excentrique. Plainte sur les procédés de Jean B. le père. Travail sur les lames libres et élastiques, et sur la courbe élastique.

Basel d. 20. October 1742.

Dero Brief vom 1. September habe ich wohl erhalten und den Einschlag an Hrn. Prof. Nic. Bernoulli gleich bestellt. Ich gratulire Ew. zu dem erhaltenen Titul eines professoris honorarii in Petersburg. Wir wollen hoffen, dass die dabei verhaftete Pension auch eingehen werde. Die Zeiten ändern sich sowohl vom Bösen zum Guten, als vom Guten zum Bösen . . . Den descensum corporis super curva horizontaliter mobili hab ich auch generalissime solvirt, der calculus wird gar sehr abbreviirt aus der Betrachtung, dass die velocitas horizontalis centri gravitatis communis constanter eadem bleibt, welches man leicht demonstriren kann. Wenn man dieses problema also solvirt, dass die actio gravitatis nulla sey, so kann man viele schöne corollaria daraus ziehen circa reactiones fluidorum, vim venae aqueae in planum impingentis etc., und insonderheit bekommt man auch einen

*

neuen Begriff von den regulis motus a collisione corporum, wenn diese auch perfecte dura wären. Mein Vater hat mir Dero letzten Brief communicirt: Es nimmt mich Wunder, dass Sie in Dero Meinung circa reactionem venae aqueae von mir dissentiren. Sie müssen gewisslich solche nicht genugsam untersucht haben; denn was ich circa hoc argumentum gesagt, kann in keinen Zweifel gezogen werden, und werden Sie gewisslich alles finden, wie ich, wenn Sie die Materie eben so genau untersucht haben. Ew. problema generalissimum circa motum globi in tubo hab ich auch solvirt; da ich aber ganz andere principia gebrauche, muss ich auch ganz andere denominationes annehmen, und kann deswegen nicht sagen, ob unsere solutiones mit einander übereinkommen. Es wäre aber viel zu weitläufig für einen Brief, Ihnen meine Methode zu überschreiben; ich will also nur einen casum particularem hierhersetzen; nämlich: (Fig. 39) Moveatur tubus AD continens globum F super plano horizontali circa polum A, sitque determinanda curva, quam describet globus una cum velocitatibus globi et tubi. Ich setze aber eine rationem finitam inter massas tubi et globi, sonsten das problema gar zu leicht wird. Sit ab initio tubus in AD, globus in B; centro A ducatur circulus $Bnmg$; deinde ponatur tubus in situ AE, globus in o, et post tempusculum infinite parvum et constans dt perveniat tubus in situm AF, globus in p, ducaturque elementum op curvae quam globus describit: fingatur in hoc statu globum a tubo dissolvi; describet globus eodem tempusculo dt rectam pd ipsi op aequalem et in directum positam cum eadem op; tubus vero perveniet in situm Ab, ita ut sit arculus $nm =$ arculo mg: centro A ducatur arculus da. Quod si jam sit $AB = a$, $Bn = x$, $nm = dx$, $Ao = y$, invenitur ex geometricis $da = \frac{2dxdy}{a}$.

Nun vero concipienda est potentia, quae globum versus tubum premat, et altera aequalis, quae tubo in a applicata, eundem premat versus globum; hoc modo globus et tubus convenient in c; erit itaque positio globi post secundum tempusculum dt in c, et positio tubi in Acf; atque si fuerit massa globi $=m$, massa tubi $=M$, distantia centri gravitatis tubi a puncto $A=d$, distantia centri oscillationis tubi a puncto A tanquam puncto suspensionis $=D$, erit ex mechanicis

$$ac : dc = m : \frac{dD}{yy}M, \text{ ergo } ac = \frac{myy}{myy+MdD}\cdot\frac{2dxdy}{a},$$

atque $dc=\frac{MdD}{myy+MdD}\cdot\frac{2dxdy}{a}$; erit igitur, ducta de perpendiculari ad pc, $ec = \frac{MdD}{myy+MdD}\cdot\frac{2dxdy}{a}\cdot\frac{ydx}{ads} = dds$, si nempe elementum op dicatur ds. Erit quoque

$$hg = \frac{my}{myy+MdD}\cdot 2dxdy = -ddx.$$

Ex his aequationibus omnia rite determinantur: Sit ab initio velocitas puncti $B=c$, velocitas in $n=V$, erit $dt=\frac{dx}{V}$ et $Vddx = dVdx$, sive $ddx=\frac{dVdx}{V}$. Substituatur iste valor in posteriori aequatione et habebitur

$\frac{2mydy}{myy+MdD}=\frac{-dV}{V}$, sive log. $\frac{myy+MdD}{maa+MdD} = \log. \frac{c}{V}$, seu $V=\frac{maa+MdD}{myy+MdD}\cdot c$. Deinde quia $dx = Vdt = \frac{maa+MdD}{myy+MdD}\cdot cdt$, substituo hunc valorem in priori aequatione, atque sic obtineo

$$\frac{MdD}{myy+MdD}\cdot\frac{2ydy}{aads}\cdot\left(\frac{maa+MdD}{myy+MdD}\right)^2\cdot ccdt^2 = dds,$$

sive $\frac{2ydy}{(myy+MdD)^3} = \frac{aadsdds}{MdD(maa+MdD)^2ccdt^2}$, quae integrata dat

$$\frac{-1}{2m(myy+MdD)^2} = \frac{aads^2}{2MdD(maa+MdD)^2ccdt^2} - C.$$

Dicatur velocitas absoluta corporis in $o=u$ eritque $dt=\frac{ds}{u}$, sicque fiet $C - \frac{1}{2m(myy+MdD)^2} = \frac{aauu}{2MdD(maa+MdD)^2cc}$.

Ponatur pro puncto B, $u = c$, ita ut ibi nullam habeat velocitatem in directione AD, fiet tunc $C = \frac{1}{2mMdD(maa + MdD)}$ et $u = \frac{maac + MdDc}{a} \sqrt{\left(\frac{MdD}{mMdD(maa+MdD)} - \frac{MdD}{m(myy+MdD)^2}\right)}$ sive $u = c\sqrt{\left[\frac{maa+MdD}{maa} - \frac{MdD}{maa}\left(\frac{maa+MdD}{myy+MdD}\right)^2\right]}$. Denique si fiat $V : u :: dx : ds$, habebitur aequatio ad curvam. Pressio quoque, quam globus ubique contra tubum exercet, est $= \frac{4VV}{a} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{MdD}{myy+MdD} \cdot m$, cujus reductionem praetereo pariter atque corollaria, quae ex solutione ista deduci possunt.

Hieraus ersehen nun Ew. meine Methode und werden leicht abnehmen, dass sie kann ad problema generalissimum applicirt werden, denn es ist leicht zu exprimiren, wo das punctum d seyn wird und der tubus Ab sive rectus sive curvus, wenn das corpus und der tubus a viribus qualibuscunque sollicitiret wird. Ich habe noch eine andere Methode, welche etwas compendioser ist, aber nicht so directa, welche deswegen übergehe, indem Ew. in Dero Schreiben an meinen Vater melden, dass Sie die solutiones indirectas nicht approbiren und zwar occasione meines theorematis, dass ein corpus a potentia sollicitatum circa centrum oscillationis, quod determinavi, gyrire, da ich doch als der erste inventor, ni fallor, dieses nützlichen theorematis in meiner dissertatione de percussione excentrica (welche Ew. gesehen) expresse gesagt, ich habe unterschiedene demonstrationes directas, denen ich aber diese indirectam vorziehe, weil sie zugleich eine schöne proprietatem anzeige. Weil es aber scheint, ich habe nöthig mich hierüber zu justificiren, so will ich zwei demonstrationes directas hierbeyfügen. **Erstlich.** Ich considerire (Fig. 40) lineam rectam AB utcunque gravem (huc enim facile reducuntur corpora quaecunque) in situ horizontali et mobilem circa punctum B fixum. Diesen motum pro primo temporis puncto kann man consideriren, als wenn das punctum fixum B weg wäre, so wird AB in situm parallelum ab fallen. Nachgehends muss man eine potentiam puncto b applicatam consideriren, welche dasselbe in punctum B restituire; so wird ab den situm cB annehmen und wird das punctum intersectionis d einestheils das centrum oscillationis seyn, quia $Dd = Bb$, anderstheils das punctum conversionis. Diese kurze synthetische Demonstration, welche ohne einigen calculum absolvirt wird, ist gewiss so rigoros als eine kann erdacht werden. Zweitens: Sit rursus linea recta AB (Fig. 41) utcunque inaequaliter gravis, quae a potentia in B perpendiculariter ad AB sollicitetur, quaeritur situs proximus DGE et punctum intersectionis G. Sit lineae centrum gravitatis in C; tunc motum quaesitum considero compositum ex progressivo parallelo, quo ACB pervenit in acb, et rotatorio circa centrum gravitatis, quo linea acb pervenit in situm DcE. Centro c ducatur arculus EbB, sit $CB = cb = a$; massa lineae $AB = m$; aggregatum productorum ex quavis particula per quadratum distantiae suae a centro gravitatis $= aaM$, et erit ex mechanicis $Bb : bE :: \frac{1}{m} : \frac{1}{M} :: M : m$, sive $GC : CB :: M : m$; ergo $GC = \frac{M}{m} \cdot CB$. Ergo G est centrum oscillationis pro puncto suspensionis B. Ich kann auch leicht den situm proximum vectis utcunque luxati determiniren; als wenn (Fig. 42) ABC ein vectis luxatus in B wäre, und das punctum C perpendiculariter versus c sollicitirt würde, so wird der situs proximus seyn in abc, welcher nicht schwer zu determiniren, dessen Determination aber in vielen problematibus mechanicis kann gebraucht werden, und ist hoc respectu die mérite eines problematis mehr in desselben Erfindung als Solution gelegen, deswegen billig ist den autorem problematis zu nennen. Was Ew. de motu composito ex rotatorio circa centrum gravitatis et ex progressivo eorumque variationibus melden, habe ich in meiner dissertatione *de percussione excentrica* *) längst angedeutet, und kann der motus globi in tubo circulari leicht daraus determiniret werden, welches mein Vater gleich observirt hat und angemerkt dass der motus idem seyn werde als eines baculi gravitatis expertis, cujus longitudo sit aequalis radio circuli et cujus altera extremitas sit onerata pondere tubi circularis, altera pondere globi. Diesen motum hab ich auch in meiner allegirten Dissertation determinirt, so wie Ew. denselben anzeigen. Dieses hab ich an Ew. schreiben wollen aus Anlass Deroselben Briefes an meinen Vater, welchen er mir hat communiciren wollen. Sie wissen, wie sehr ich aestimire und admirire alle Dero profunde Meditationen, und können sich leicht einbilden, dass ich auch die in diesem Brief enthaltenen Inventionen von einer sonderbaren Penetration und mérite schätze. Ich möchte wissen, ob in dem 8ten tomo Comment. Petrop. meine dissertatio de percussione excentrica noch nicht inserirt ist. — Man druckt die collectionem operum von meinem Vater, und habe nun erst erfahren, dass er die problemata dynamica, die ich zuerst erfunden und solvirt (als z. Ex. de descensu globi super triangulo mobili, de pendulo luxato, de centro rotationis spontaneo etc.) auch inserirt hat, ohne meiner Meldung zu thun; ja, er inserirt die demonstrationem centri spontanei rotationis ex

*) Comment. T. IX, p. 189

ann gebraucht werden, und ist
:s problematis mehr in desselben
en, deswegen billig ist den auto
Was Ew. de motu composito ex
tatis et ex progressivo eorumque
:h in meiner dissertatione *de per-*
ıngedeutet, und kann der motus
ıt daraus determiniret werden,
bservirt hat und angemerkt dass
ıls eines baculi gravitatis exper-
.lis radio circuli et cujus altera
:e tubi circularis, altera pon-
ıb ich auch in meiner allegirten
wie Ew. denselben anzeigen.
iben wollen aus Anlass Dero-
:er, welchen er mir hat com-
ı, wie sehr ich aestimire und
Meditationen, und können sich
h die in diesem Brief enthal-
sonderbaren Penetration und
vissen, ob in dem 8ten tomo
ertatio de percussione excen-
· Man druckt die collectionem
und habe nun erst erfahren,
ica, die ich zuerst erfunden
ısu globi super triangulo mo-
ıtro rotationis spontaneo etc.)
r Meldung zu thun; ja, er-
entri spontanei rotationis ex

principio minimae inertiae petitam tanquam suam, ohne gleichfalls meiner zu gedenken. Wenn es nun wäre, dass ich nöthig hätte die suspicionem plagii contra Parentem commissi von mir zu decliniren, so müsste ich mich darüber justificiren. Wenn aber Ew. meinen, dass mir mein silentium bei der Akademie in Petersburg nicht schade, so wird mir solches nicht sauer ankommen. Herr Bülffinger hat mir vor diesem vorgeworfen, ich habe alles von meinem Vater und nichts aus mir selber, da ich doch gewisslich kein Wort von ihm entlehnt. Ew. sagen mir amice Dero Meinung. Da sonsten die Petersburger Akademie auf so schlüpfrigen Füssen steht, wie Sie melden, als belieben Sie mich zu berichten, ob Sie Dero pièces noch dahin schicken, oder bis auf weitere éclaircissemens reserviren. Ich hab vor einigen Monaten eine weitläufige und operose pièce dahin geschickt de sono laminarum liberarum, darin ich gar viel merkwürdige phaenomena physica explicirt und ausgerechnet habe: hierzu war aber eine neue theoria physica erfordert, ehe und bevor ich die mathesin appliciren konnte. Diese pièce hab ich an Prince Cantemir adressirt, welcher bei Hrn. Clairaut dergleichen Sachen tractirt und mich hat bitten lassen, meine pièces an ihn zu adressiren . . . . Ich möchte wissen ob Ew. die curvaturam laminae elasticae nicht könnten sub hac facie solviren, dass eine lamina datae longitudinis in duobus punctis positione datis fixirt sey, also dass die tangentes in istis punctis auch positione datae seyen. Est nempe (Fig. 43) longitudo ABC data; puncta A et C positione data et extremitates laminae in A et C ita sunt muro infixae, ut anguli A et C sint dati. Dieses ist die idea generalissima elasticarum; hab aber sub hac facie noch keine Solution gefunden, als per methodum isoperimetricorum, da ich annehme, dass die vis viva potentialis laminae elasticae insita müsse minima seyn, wie ich Ew. schon einmal gemeldet. Auf diese Weise bekomme ich eine aequationem differentialem 4ti ordinis, welche ich nicht hab genugsam reduciren können, um zu zeigen, dass die aequatio ordinaria elasticae general sey. Ich erinnere mich zwar, dass vor diesem Ew. sowohl als ich gezweifelt haben, ob die aequatio ordinaria elasticae general sey mit dem Argument, der Cirkul sey nicht darin begriffen, da doch eine lamina elastica manifeste könne ad curvaturam circularem inflectiret werden. Es ist auch in der That klar, dass wenn die puncta A und C zusammen kommen und die extremitates laminae eine communem tangentem haben, parallelam muro, cui infiguntur, dass alsdann die curvatura elasticae ein vollkommner Cirkul seyn werde. Dessen ungeachtet hab ich seithero observirt, dass die idea meines Oncles Herrn Jacobi Bernoulli omnes elasticas in sich begreife hoc modo: Man bilde sich einen vectem rigidum CD ein, laminae ABC affixum, cujus extremitas D a potentia DE trahatur, so wird man allzeit die longitudinem vectis CD, die magnitudinem potentiae DE und den angulum CDE determiniren können hac lege, dass die potentia DE die laminam ABC in sua curvatura erhalte, wenn die extremitas C nicht mehr coërcirt zu seyn supponirt wird. Daraus erhellet, dass die curva ABC kann continuirt werden bis in F, allwo der radius osculi infinitus seyn wird, und alsdann in puncto F die potentia sub directione FE müsse applicirt werden. Wenn man nun sub hac idea die longitudinem vectis CD infinitam supponirt, so siehet man, dass die curva ABC ein arcus circularis seyn müsse, welches ich hab expliciren wollen. Ew. reflectiren ein wenig darauf, ob man nicht könne, sine interventu vectis, die curvaturam ABC immediate ex principiis mechanicis deduciren. Sonsten exprimire ich die vim vivam potentialem laminae elasticae naturaliter rectae et incurvatae durch $\int \frac{ds}{RR}$, sumendo elementum ds pro constante et indicando radium osculi per R. Da Niemand die methodum isoperimetricorum so weit perfectionniret, als Sie, werden Sie dieses problema, quo requiritur ut $\int \frac{ds}{RR}$ faciat minimum, gar leicht solviren.