LETTRES

DE

NICOLAS BERNOULLI

neveu de JACQUES et de JEAN, cousin germain de DANIEL
et auteur du Traité: *De arte conjectandi in jure.*

(né le 10 octobre 1687, mort le 29 novembre 1759)

À

LÉONARD EULER

1742. 1743.

Correspondance mathématique et physique Tome II pag: 681.

Fac-similé de l'écriture de Nicolas Bernoulli, neveu de Jean: 1742.

Viro Celeberrimo et Mathematico Acutissimo
Leonhardo Eulero
S.P.D.
Nicolaus Bernoulli.

Patruelis meus mihi reddidit litteras Tuas 1. Xbris scriptas, ex quibus latus intellexi, Tibi responsorias meas ad priores Tuas non prorsus displicuisse, simulque vidi me à Te rogari, ut plus temporis impendam ad amplificationem scientia Mathematica, qua in re Tibi obsecundarem, nisi plurima quæ mentem alio distrahunt obstarent; adde quod non ea polleam ingenii vi, ut Te in sublimissimis Tuis speculationibus sequi nedum assequi valeam. Quia tamen permittis, ut rogationi Tuæ tantum tribuam, quantum per otium licebit, non ægre feres, si hac vice ad ea solum respondeam, quæ non multum meditationis aut laboris requirunt.

Lith. par A. Davignon

LETTRE I.

═

SOMMAIRE. Sommation des puissances réciproques des nombres naturels.

Celeberrimo et acutissimo Mathematico LEONHARDO EULERO S. P. D. NIC. BERNOULLI.

Hagnauerus ille I. V. D. Aroviensis hac transiit sub finem mensis februarii, litterasque Tuas humanissimas, quae me maximo gaudio affecerunt, uxori meae cum domi non essem tradidit nunquam postea reversus, ita ut commendationis Tuae multum apud me valentis fructus nullos tulerit. Caeterum pergratum mihi fuit intelligere, me adhucdum in amicorum Tuorum numero haberi, sed velim Tibi quoque persuadeas, me inter admiratores praecellentissimi Tui ingenii non infimum mihi vendicare locum. Doleo sane quam maxime, quod contra animi mei propensionem rebus mathematicis jam a longo tempore vacare non possim, impeditus variis, praeter academica, negotiis. Falleris si existimas, me elegantissima Tua inventa et scripta, quae uti deceret perlegere otium mihi nondum fuit, examini meo subjicere solere. Si quando aliquid mathematici solvendum aut examinandum suscipio, id non nisi rogatus et otium nactus facio. Ignosce igitur, quod petitioni Tuae obsecundare volens tantum temporis mihi sumserim ad hanc responsionem conficiendam.

Perplacent omnia quae de methodis Tuis summandi seriem $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. scripsisti, eam quidem, quam pro altioribus potestatibus ex divisoribus infinitis aequationis $x = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} -$ etc. Te derivasse dicis, nondum vidi. Solummodo a Patruo audiveram, Te ex secundo termino aequationis infiniti gradus $0 = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} -$ etc. invenisse summam seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ etc. esse aequalem $\frac{1}{6}\pi\pi$, denotante π circumferentiam circuli, cujus diameter 1; quod mihi occasionem praebuerat investigandi eandem summam per methodum aliquam, quam tanquam lusum ingenii cum D. Jallabert, tum temporis apud nos degente, nunc professore Genevensi, communicaveram eum solummodo in finem, ut ipsum in seriebus infinitis exercerem; ipsam autem methodum, contra quam scio aliquid objici posse, quod explanatione opus habet, tam parvi aestimaveram, ut nullum illius schediasmatis apographum apud me retinuerim, neque illud Commentariis Academiae Petropolitanae inseri permisissem, si id in mea potestate fuisset. In litteris ad Patruelem meum A. 1728 scripseram me incidisse, occasione serierum recurrentium, in hoc theorema (quod quidem etiam aliis modis inveniri et demonstrari potest): posito sinu arcus $A = z$,

ossim, impe-
ris si existi-
ta, quae uti
examini meo
ci solvendum
tus et otium
uac obsecun-
hanc respon-

is summandi
uidem, quam
is aequationis
ondum vidi.
ndo termino
— etc. inve-
qualem $\frac{1}{6}\pi\pi$,
eter 1; quod
em summam
ingenii cum
nunc profes-
odo in finem,
n autem me-
quod expla-
, ut nullum
uerim, neque
inseri permi-
ad Patruelem
one serierum
tiam aliis mo-
arcus $A = z$,

radio $= 1$, esse sinum arcus

$$nA = \frac{(\sqrt{(1-zz)}+z\sqrt{-1})^n - (\sqrt{(1-zz)}-z\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}},$$

quae expressio, posito n numero infinite magno et $z = \frac{s}{n}$,

$$\text{evadit} = \frac{\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}} = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.}$$

$=$ sinui arcus s. Quanquam autem, ut recte dicis, hic sinus sit productum horum factorum

$$s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

et singula quadrata $ss = 0, \pi\pi, 4\pi\pi, 9\pi\pi$, etc. ita ut aequatio praedicta nullas habeat radices imaginarias, non tamen puto ex hoc solo legitime concludi posse, summam omnium $\frac{1}{ss}$ excepto $\frac{1}{0}$ h. e. $\frac{1}{\pi\pi}, \frac{1}{4\pi\pi}, \frac{1}{9\pi\pi}$ etc. esse $\frac{1}{6} =$ negativae coëfficienti secundi termini in hac infinita aequatione $0 = 1 - \frac{ss}{6} + \frac{s^4}{120} -$ etc. nisi simul demonstretur, seriem $s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} -$ etc. esse convergentem et exacte dare sinum arcus s, quicunque valor assignetur ipsi s; quae quidem convergentia hic locum habet, sed non in serie ista $s - \frac{s^3}{6c^4} +$ etc. quae invenitur pro sinu arcus elliptici, sumtis 1 et c pro semiaxibus ellipsis. Cramerus, prof. math. Genevensis mihi scripserat nonneminem contra hanc methodum summandi seriem $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ etc. objecisse, quod eodem modo demonstrari posset, hanc summam fore $= \frac{1}{6}$ quadrati circumferentiae cujuscunque ellipsis (sumta nempe tertia proportionali ad axem alterutrum et alterum pro unitate) quod esset absurdum. Haerebam aliquamdiu incertus quomodo resolvenda esset haec difficultas, postea tamen vidi respondendum esse, seriem istam $s - \frac{s^3}{6c^4} +$ etc. crescente s fieri divergentem, neque exacte dare valorem sinus arcus elliptici, per consequens coëfficientem negativam secundi termini in hac aequatione infinita $0 = 1 - \frac{ss}{6c^4} + \text{etc.}$ non exprimere summam omnium $\frac{1}{ss}$, seu non esse $= \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \frac{1}{9\pi\pi} + \text{etc.}$ Fortassis autem ex hac ipsa divergentia seriei vel terminorum aequationis infinitae concludi potest, ejusmodi aequationem infiniti gradus semper habere radices imaginarias, id quod Tibi examinandum relinquo.

Valde ingeniosa est altera illa Tua methodus, quam deduxisti ex integratione quantitatum $\frac{x^{p-1}dx \pm x^{q-p-1}dx}{1 \pm x^q}$; sed nescio quid per *solitas integrationis regulas* intelligas, quando ais Te per illas invenisse, quod in casu $x = 1$ integralia dictarum quantitatum reducantur ad

$$\frac{\pi}{q \sin. \text{arc.} \frac{p\pi}{q}} \quad \text{et} \quad \frac{\pi \cos. \text{arc.} \frac{p\pi}{q}}{q \sin. \text{arc.} \frac{p\pi}{q}};$$

sane haec reductio multum laboris et artis postulat. Ecce modum, quo rem perfeci:

Lemma. Posito radio $= 1$, cosinu arcus $A = \frac{m + m^{-1}}{2}$, sinu ejusdem $\frac{m - m^{-1}}{2\sqrt{-1}}$, cosinus arcus qA est $= \frac{m^q + m^{-q}}{2}$, et sinus arcus $qA = \frac{m^q - m^{-q}}{2\sqrt{-1}}$. Ponatur $\frac{x^{p-1}dx}{1 \pm x^q} = \frac{P dx}{1 - mx} +$

$$\frac{a + bx + cxx \ldots + gx^{p-1} \ldots + \gamma x^{q-4} + \beta x^{q-3} + \alpha x^{q-2}}{1 + mx + mmxx \ldots + m^{q-1}x^{q-1}},$$

erit m vel $\frac{1}{m}$ radix aequationis $1 \pm x^q = 0$, seu m^q et $m^{-q} = \mp 1 =$ cosinui arcuum (posita semi circumferentia $= \pi$)

$\left\{\begin{matrix}\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \text{etc.}\\ 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \text{etc.}\end{matrix}\right. = \frac{m^q + m^{-q}}{2}$, ergo per lemma praemissum est

$$\frac{m+m^{-1}}{2} \text{ cosin. arcuum } \left\{\begin{matrix}\frac{\pi}{q}, \frac{3\pi}{q}, \frac{5\pi}{q}, \frac{7\pi}{q}, \text{ etc.}\\ 0, \frac{2\pi}{q}, \frac{4\pi}{q}, \frac{6\pi}{q}, \text{ etc.}\end{matrix}\right.$$

Invenitur autem

$$\begin{array}{ll} a = -P & \alpha = P m^{q-2} \\ b = am - Pm \; = -2Pm & \beta = \frac{\alpha}{m} + P m^{q-3} = 2Pm^{q-3} \\ c = bm - Pmm = -3Pmm & \gamma = \frac{\beta}{m} + Pm^{q-4} = 3Pm^{q-4} \\ \vdots & \vdots \\ g = (1-p)Pm^{p-1} & \quad = (q-p)Pm^{p-1} \end{array}$$

hinc $P = \frac{1}{qm^{p-1}}$ et $\int \frac{P\,dx}{1-mx} = \int \frac{m^{-p+1}dx}{q(1-mx)} = \frac{m^{-p}}{q}\log.\frac{1}{1-mx}$, et $\int \frac{x^{p-1}dx}{1 \pm x^q}$ = aggregato omnium $\frac{m^{-p}}{q}$ log. $\frac{1}{1-mx}$, positis nempe pro m sucessive omnibus valoribus radicum aequationis $1 \pm x^q = 0$, inter quos cum etiam sit $\frac{1}{m}$, erit semper haec quantitas $\frac{m^{-p}}{q}\log.\frac{1}{1-mx} + \frac{m^p}{q}\log.\frac{1}{1-m^{-1}x}$ realis; nimirum $\log.\frac{1}{1-mx} + \log.\frac{1}{1-m^{-1}x} = \log.\frac{1}{1-mx-m^{-1}x+xx}$, et $\log.\frac{1}{1-mx} - \log.\frac{1}{1-m^{-1}x} = \int\frac{mdx}{1-mx} - \int\frac{m^{-1}dx}{1-m^{-1}x} = \int\frac{mdx - m^{-1}dx}{1-mx-m^{-1}x+xx} =$ (posito $x = \frac{m+m^{-1}}{2} + t$ et $\frac{m-m^{-1}}{2\sqrt{-1}} = r$) $\int\frac{mdt \quad m^{-1}dt}{rr+tt} = \frac{m-m^{-1}}{rr}\cdot S = \frac{-4}{m-m^{-1}}\cdot S$, ubi S significat summam duorum arcuum circularium, quorum tangentes sunt t et $\frac{m+m^{-1}}{2}$, et radius $= r$, quae integratio ita fit, quia in casu $x = 0$ seu $t = \frac{-m-m^{-1}}{2}$ integrale $\log.\frac{1}{1-mx} - \log.\frac{1}{1-m^{-1}x}$

evanescit; hinc posito L pro $\log.\frac{1}{1-mx-m^{-1}x+xx}=$

$$\log.\frac{1}{1-mx}+\log.\frac{1}{1-m^{-1}x},\text{ invenitur}$$

$\log.\frac{1}{1-mx}=\frac{-2S}{m-m^{-1}}+\frac{1}{2}L$, et $\log.\frac{1}{1-m^{-1}x}=\frac{2S}{m-m^{-1}}+\frac{1}{2}L$; per consequens

$$\frac{m^p}{q}\log.\frac{1}{1-m^{-1}x}+\frac{m^{-p}}{q}\log.\frac{1}{1-mx}=\frac{2m^p-2m^{-p}}{q(m-m^{-1})}\cdot S+\frac{m^p+m^{-p}}{2q}\cdot L$$

$=$ (si $\frac{m+m^{-1}}{2}$ significet cosinum et $\frac{m-m^{-1}}{2\sqrt{-1}}$ sinum arcus A)

$$\frac{m^p-m^{-p}}{q\sqrt{-1}\sin A}\cdot S+\frac{m^p+m^{-p}}{2q}\cdot L=\frac{2\sin pA}{q\sin A}\cdot S+\frac{\cos pA}{q}\cdot L.$$

Integralis igitur ipsius $\frac{x^{p-1}dx}{1+x^q}$ est composita ex tot quantitatibus hanc formam $\frac{2\sin pA}{q\sin A}\cdot S+\frac{\cos pA}{q}\cdot L$ habentibus, quot sunt unitates in $\frac{1}{2}q$, si q sit numerus par, vel quot sint in $\frac{q-1}{2}$, si q sit numerus impar, quo casu adhuc addi debet

$$+\text{ vel }-\frac{1}{q}\log.\frac{1}{1+x},$$

prout p est numerus par vel impar, nam tunc posito $m=-1$, est $1-mx=1-m^{-1}x=1+x$ unus ex divisoribus ipsius $1+x^q$. Pro $\int\frac{x^{p-1}dx}{1-x^q}$ vero sumi debent tot quantitates $\frac{2\sin pA}{q\sin A}\cdot S+\frac{\cos pA}{q}\cdot L$ quot sunt unitates in $\frac{1}{2}q-1$ si q sit par, vel in $\frac{q-1}{2}$ si q sit impar, et aggregato illarum addi $+$ vel $-\frac{1}{q}\log.\frac{1}{1+x}+\frac{1}{q}\log.\frac{1}{1-x}$ in priori casu, et $\frac{1}{q}\log.\frac{1}{1-x}$ in posteriori. Si pro p substituatur $q-p$ habebitur $\int\frac{x^{q-p-1}dx}{1\pm x^q}$, et integralis ipsius $\frac{x^{p-1}dx\pm x^{q-p-1}dx}{1\pm x^q}$ erit composita ex solis quantitatibus hanc formam

$$\frac{m^p-m^{-p}\pm m^{q-p}\mp m^{-q+p}}{q\sqrt{-1}\sin A}\cdot S+\frac{m^p+m^{-p}\pm m^{q-p}\pm m^{-q+p}}{2q}\cdot L$$

habentibus, sed quia m^q et m^{-q} est $=\mp 1$, est $\pm m^{q-p} = -m^{-p}$ et $\pm m^{-q+p} = -m^p$, adeoque evanescit quantitas per L multiplicata, et altera fit $\frac{2m^p - 2m^{-p}}{q\sqrt{-1}\sin A}\cdot S = \frac{4\sin pA}{q\sin A}\cdot S$. In casu $x=1$ fit $S = \sin A\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}A\right)$, et

$$\frac{4\sin pA}{q\sin A}\cdot S = \frac{2\sin pA}{q}(\pi - A).$$

Substitutis igitur pro A ejus valoribus $\frac{\pi}{q}$, $\frac{3\pi}{q}$, $\frac{5\pi}{q}\dots$ usque ad $\frac{q-1}{q}\pi$ vel $\frac{q-2}{q}\pi$, et $\frac{2\pi}{q}$, $\frac{4\pi}{q}$, $\frac{6\pi}{q}\dots$ usque ad $\frac{q-2}{q}\pi$ vel $\frac{q-1}{q}\pi$, omissis nempe illis qui proveniunt ex radicibus $m = \mp 1$, et posito $B = \frac{p\pi}{q}$, evadit $\int\frac{x^{p-1}dx \pm x^{q-p-1}dx}{1\pm x^q} = \frac{2\pi}{q}\left(\sin B + \sin 3B + \sin 5B\dots \text{usque ad} \sin (q-1) \text{ vel } (q-2)B\right) - \frac{2\pi}{qq}\left(\sin B + 3\sin 3B + 5\sin 5B\dots \text{usque ad } (q-1)\sin (q-1)B \text{ vel } (q-2)\sin (q-2)B\right)$, aut $\frac{2\pi}{q}\left(\sin 2B + \sin 4B + \sin 6B\dots \text{usque ad} \sin (q-2) \text{ vel } (q-1)B\right) - \frac{2\pi}{qq}\left(2\sin 2B + 4\sin 4B + 6\sin 6B\dots \text{usque ad } (q-2)\sin (q-2)B \text{ vel } (q-1)\sin (q-1)B\right)$: quia vero posito sinu arcus $B = \frac{n - n^{-1}}{2\sqrt{-1}}$ est $\sin 3B = \frac{n^3 - n^{-3}}{2\sqrt{-1}}$, $\sin 5B = \frac{n^5 - n^{-5}}{2\sqrt{-1}}$ et ita porro, et hae quantitates componuntur ex terminis progressionis geometricae, habetur pro summa horum sinuum $\frac{2n - n^{q+1} - n^{-q+1} \text{ vel } 2n - n^q - n^{-q+2}}{(1-nn)2\sqrt{-1}} =$

$$\frac{2 - n^q - n^{-q} \text{ vel } 2 - n^{q-1} - n^{-q+1}}{(n^{-1} - n)2\sqrt{-1}} = \frac{1 - \cos qB \text{ vel } (q-1)B}{2\sin B};$$

summa autem seriei $\sin B + 3\sin 3B + 5\sin 5B + \text{etc.}$ invenitur $= \frac{\sin (q+1)B \text{ vel } qB}{2\,\square\,\sin B} - \frac{(q+1)\cos qB \text{ vel } q\cos (q-1)B}{2\sin B}$, simimiliter summa seriei $\sin 2B + \sin 4B + \sin 6B + \text{etc.}$ in-

venitur $= \frac{\cos B - \cos (q-1) \text{ vel } qB}{2 \sin B}$, et series $2 \sin 2B + 4 \sin 4B + 6 \sin 6B + \text{etc.} = \frac{\sin qB \text{ vel } (q+1)B}{2 \,\square \sin B} - \frac{q \cos (q-1) B \text{ vel } (q+1) \cos qB}{2 \sin B}$.
Substitutis igitur valoribus harum serierum erit

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx + x^{q-p-1}\,dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{q \sin B}\left[1 - \cos qB \text{ vel } (q-1)B - \frac{\sin (q+1)B \text{ vel } qB}{q \sin B} + \left(1 + \frac{1}{q}\right) \cos qB \text{ vel } \cos (q-1)B\right] =$$

$$\frac{\pi}{q \sin B}\left[1 + \frac{1}{q} \cos qB - \frac{\sin (q+1)B}{q \sin B}\right] \text{ vel } \left[1 - \frac{\sin qB}{q \sin B}\right] =$$

(quia $\sin qB = \sin p\pi = 0$ et $\sin (q+1)B = \sin qB \cos B + \sin B \cos qB$) $\frac{\pi}{q \sin B} = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$; pari ratione est

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx - x^{q-p-1}\,dx}{1-x^q} = \frac{\pi}{q \sin B}\left[\cos B - \cos (q-1)B - \frac{\sin qB}{q \sin B} + \cos (q-1)B\right] \text{ vel } \left[\cos B - \cos qB - \frac{\sin (q+1)B}{q \sin B} + \left(1 + \frac{1}{q}\right) \cos qB\right] = \frac{\pi \cos B}{q \sin B} = \frac{\pi \cos \frac{p\pi}{q}}{q \sin \frac{p\pi}{q}}.\ Q.\ E.\ I.$$

Sed tanto apparatu opus non esse mihi videtur ad concludendum, quod, cum eaedem formulae per series integratae in casu $x = 1$ dent

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q-p} - \frac{1}{q+p} - \frac{1}{2q-p} + \frac{1}{2q+p} + \frac{1}{3q-p} - \frac{1}{3q+p} - \frac{1}{4q-p} + \text{etc.}$$

et

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q-p} + \frac{1}{q+p} - \frac{1}{2q-p} + \frac{1}{2q+p} - \frac{1}{3q-p} + \frac{1}{3q+p} - \frac{1}{4q-p} + \text{etc.},$$

posito $\frac{p}{q} = z$ sit

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} + \frac{1}{3-z} - \text{etc. et}$$

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - \frac{1}{3-z} + \text{etc.}$$

quippe eaedem aequationes sine integratione formularum

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx \pm x^{q-p-1}\,dx}{1 \pm x^{q}}$$

obtinentur. Quia enim sinus πz est productum factorum $\pi z\,(1 - zz)\,(1 - \frac{1}{4}zz)\,(1 - \frac{1}{9}zz)$ etc., sumendo differentialia logarithmorum harum quantitatum et dividendo per dz habetur statim

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - \frac{1}{3-z} + \text{etc.}$$

Omitto brevitatis causa resolutionem fractionis $\frac{\pi}{\sin \pi z} =$, quae aliquanto prolixior est, quamque non uno modo fieri posse existimo, $= \frac{1}{z(1-zz)(1-\frac{1}{4}zz)\ \text{etc.}}$ in fractiones simpliciores

$$\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{1-z} + \frac{\gamma}{1+z} + \frac{\delta}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{\varepsilon}{1+\frac{1}{2}z} + \text{etc.}$$

Sed in eo, quod caput rei est, haereo, nempe in applicatione harum serierum ad inventionem summae seriei

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \text{etc.}$$

Video equidem quomodo ex eo, quod per primam differentiationem habetur

$$\frac{\pi\pi}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{zz} + \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(2-z)^2} + \frac{1}{(2+z)^2} + \frac{1}{(3-z)^2} + \text{etc.}$$

facto $z = \frac{1}{2}$, summa reciprocorum quadratorum inveniatur, sed rem in altioribus potestatibus continuata differentiatione succedere vix credo; inveni enim seriem ex secunda differentiatione ortam dare quidem summam seriei $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc.}$ sed non seriei, in qua omnes termini sunt affirmativi.

Hae sunt, Vir Celeberrime, quae ad petitionem Tuam respondenda esse duxi, pro premio obsequii nil aliud, quam ut a Te meliora edocear, expecto. Vale et me ama. Dabam Basileae d. 13 Jul. 1742.

LETTRE II.

S o m m a i r e. *Suite des recherches précédentes. Développement des fonctions trigonométriques en produits infinis. Différentes recherches analytiques.*

Viro Celeberrimo et Mathematico acutissimo
Leonhardo Eulero S. P. D. Nic. Bernoulli.

Patruelis meus mihi reddidit litteras Tuas d. 1 Septembris scriptas, ex quibus laetus intellexi, Tibi responsorias meas ad priores Tuas non prorsus displicuisse, simulque vidi me a Te rogari, ut plus temporis impendam ad amplificationem scientiae mathematicae, qua in re Tibi obsecundarem, nisi plurima quae mentem alio distrahunt obstarent; adde quod non ea polleam ingenii vi, ut Te in sublimissimis Tuis speculationibus sequi nedum assequi valeam. Quia tamen permittis, ut rogationi Tuae tantum tribuam, quantum per otium licebit, non aegre feres, si hac vice ad ea solum respondeam, quae non multum meditationis aut laboris requirunt.

RE II.

ècédentes. Développement des fonctions 's. Différentes recherches analytiques.

Mathematico acutissimo
P. D. Nic. Bernoulli.

litteras Tuas d. 1 Septembris
llexi, Tibi responsorias meas
displicuisse, simulque vidi me
impendam ad amplificationem
n re Tibi obsecundarem, nisi
strahunt obstarent; adde quod
t Te in sublimissimis Tuis spe-
qui valeam. Quia tamen per-
m tribuam, quantum per otium
vice ad ea solum respondeam,
s aut laboris requirunt.

Videris mihi non recte percepisse mentem meam in iis, quae dixi de usu coëfficientis secundi termini in serie

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.}$$

Non negavi quod si fuerit

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.} = s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{9\pi\pi}\right)\text{etc.}$$

legitime concludi possit esse

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \frac{1}{9\pi\pi} + \text{etc.};$$

hoc utique certum est: Sed hoc negavi, quod etiamsi sinus arcus s sit $= s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{9\pi\pi}\right)$ etc. et $= \left(\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n\right) : 2\sqrt{-1}$, eadem inde conclusio sequatur, nisi simul demonstretur seriem

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.}$$

per quam idem sinus exprimi solet, esse convergentem; ratio negationis est, quia si esset divergens, illa non foret aequalis sinui arcus s aut producto factorum

$$s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right)\text{etc.}$$

et hac ratione resolvitur objectio illa petita a serie pro sinu arcus elliptici $s - \frac{s^3}{6c^4} + \text{etc.}$ quae crescente s fit divergens, unde non concludi potest, ut in circulo, ubi series non est divergens, coëfficientem negativam secundi termini in hac aequatione infinita $0 = 1 - \frac{ss}{6c^4} + \text{etc.}$ h. e. $\frac{1}{6c^4}$ exprimere summam omnium $\frac{1}{ss}$, seu esse $= \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \frac{1}{9\pi\pi} + \text{etc.}$

Petis a me, ut Tecum communicem methodum demonstrandi independenter a seriebus a Te memoratis et provenientibus ab integratione formularum $\frac{x^{p-1}dx}{1 \pm x^q}$, quod sinus

*

arcus πz sit aequalis producto factorum

$$\pi z (1-zz)(1-\tfrac{1}{4}zz)(1-\tfrac{1}{9}zz) \text{ etc.}$$

Miror Te istud petere, cum facile observare potueris, hanc demonstrationem eodem modo confici posse, quo Tu ostendisti cosinum arcus s, seu hanc seriem

$$1-\frac{ss}{2}+\frac{s^4}{24}-\frac{s^6}{720}+\text{etc.}$$

vel hanc quantitatem

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n+\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n \text{ si } n=\infty,$$

esse productum horum factorum

$$\left(1-\frac{4ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4ss}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4ss}{25\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

Ecce quomodo hanc demonstrationem pro utroque, sinu et cosinu, investigaverim. Quoniam sinus arcus s est $=$ $\left(\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n-\left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n\right):2\sqrt{-1}=s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-$ etc. unus factorum simplicium, qui sinum componunt, est s, prodeunte in quoto $1-\frac{ss}{6}+\frac{s^4}{120}-$ etc. pro quolibet reliquorum ponatur $1-\frac{s}{m}$, qui si fingatur $=0$, erit $s=m$, et ipse sinus vel $\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n-\left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n=0$, vel substituendo m pro s, erit $\left(1+\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n=\left(1-\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n$ seu

$$\left(1+\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n:\left(1-\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n \text{ et } \left(1-\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n:\left(1+\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n=1,$$

per consequens

$$\left(1+\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n:\left(1-\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n+\left(1-\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n:\left(1+\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n=$$

$2=2\cos 2p\pi$, posito $p\pi$ pro multiplo quocunque semicircumferentiae, ergo per lemma in litteris meis prioribus communicatum:

$\left(1+\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right):\left(1-\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)+\left(1-\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right):\left(1+\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)=$
$\left(2-\frac{2mm}{nn}\right):\left(1+\frac{mm}{nn}\right)=2\cos\frac{2p\pi}{n}=2\sqrt{\left(1-\sin^2\frac{2p\pi}{n}\right)}=$
(ob n infinite magnum) $2\sqrt{\left(1-\frac{4pp\pi\pi}{nn}\right)}=2\left(1-\frac{2pp\pi\pi}{nn}-\text{etc.}\right)$,
id est $\left(1-\frac{mm}{nn}\right):\left(1+\frac{mm}{nn}\right)=1-\frac{2pp\pi\pi}{nn}-$ etc. seu
$1-\frac{mm}{nn}=1-\frac{2pp\pi\pi}{nn}+\frac{mm}{nn}-$ etc. seu $\frac{2pp\pi\pi}{nn}=\frac{2mm}{nn}-$ etc.
seu neglectis terminis infinite minoribus $pp\pi\pi=mm$, h. e. $m=\pm p\pi$, quo valore substituto evadit factor quaesitus $1-\frac{s}{p\pi}$ vel $1+\frac{s}{p\pi}$, et ex his compositus $1-\frac{ss}{pp\pi\pi}$; scriptis igitur pro p omnibus numeris integris, sinus arcus s evadit compositus ex factoribus

$$s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right)\text{ etc.}$$

seu facto $s=\pi z$, sinus arcus πz est $=$

$$\pi z\,(1-zz)\,(1-\tfrac{1}{4}zz)\,(1-\tfrac{1}{9}zz)\text{ etc.}$$

Eodem modo si ponatur $1-\frac{s}{m}$ pro quolibet factorum simplicium quantitatis

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n+\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n,$$

quae exprimit cosinum arcus s, invenitur $m=\pm\frac{1}{2}\pi$, vel $\pm\frac{3}{2}\pi$, vel $\pm\frac{5}{2}\pi$ etc. unde factor

$$1-\frac{s}{m}\text{ fit }=1-\frac{2s}{(2p-1)\pi}\text{ vel }=1+\frac{2s}{(2p-1)\pi},$$

et factor ex his duobus compositus $1-\frac{4ss}{(2p-1)^2\pi\pi}$, quo modo Tu ope theorematis Cotesiani invenisti, in quo si loco $2R-1$ ponas $2R$, ut $aa-2ab\cos A.\frac{2R}{n}\pi+bb$ sit divisor quantitatis

$$a^n-b^n=\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n-\left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n$$

invenies pro factore generali seriei $1 - \frac{ss}{6} + \frac{s^4}{120}$ — etc. quantitatem $1 - \frac{ss}{RR\pi\pi}$. Mea demonstratio non opus habet theoremate Cotesiano, sed continet in se ipsam hujus theorematis demonstrationem. Inventis factoribus, qui sinum et cosinum arcus πz componunt, fore

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} + \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} - \frac{1}{4-z} + \text{etc.}$$

sic demonstro:

$$\frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = \frac{\pi z(1-zz)(1-\frac{1}{4}zz)(1-\frac{1}{9}zz)(1-\frac{1}{16}zz)\text{ etc.}}{(1-4zz)(1-\frac{4}{9}zz)(1-\frac{4}{25}zz)(1-\frac{4}{49}zz)\text{ etc.}}$$

$$\text{diff. log.}\frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = \frac{d.\sin \pi z}{\sin \pi z} - \frac{d.\cos \pi z}{\cos \pi z} = \frac{\pi dz \cos \pi z}{\sin \pi z} + \frac{\pi dz \sin \pi z}{\cos \pi z} =$$

$$\frac{\pi dz}{\sin \pi z . \cos \pi z} = \frac{2\pi dz}{\sin 2\pi z} = \text{d. log.}\frac{\pi z(1-zz)(1-\frac{1}{4}zz)(1-\frac{1}{9}zz)\text{ etc.}}{(1-4zz)(1-\frac{4}{9}zz)(1-\frac{4}{25}zz)\text{ etc.}}$$

ergo posito z loco $2z$ erit

$$\frac{\pi dz}{\sin \pi z} = \text{diff. log.}\frac{\frac{1}{2}\pi z(1-\frac{1}{4}zz)(1-\frac{1}{16}zz)(1-\frac{1}{36}zz)\text{ etc.}}{(1-zz)(1-\frac{1}{9}zz)(1-\frac{1}{25}zz)\text{ etc.}} =$$

$$dz\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} + \text{etc.}\right)$$

et dividendo per dz constat propositum.

Fateor me in ea fuisse opinione, Te generaliter summationem seriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + $ etc. etiam ubi n est numerus impar, in Te recepisse; sed vide, Vir Acutissime, annon juste in hanc opinionem fuerim deductus per haec Tua verba „Inventis hoc modo (nempe per primam differentiationem) summis serierum reciprocarum quadratorum, secunda differentiatio ad summas cuborum deducet, etc.“

Optima est methodus Tua inveniendi numeratores constantes A fractionum $\frac{A}{\alpha + \beta x}$, in quas fractio data $\frac{M}{N}$, cujus termini M et N sunt functiones quaecunque rationales quantitatis x, resolvi potest, posito denominatores binomiales $\alpha + \beta x$ esse divisores cognitos denominatoris N; quae breviter huc redit, ut fiat $A = \frac{\beta M dx}{dN}$, et divisis terminis per dx, pro x substituatur $\frac{-\alpha}{\beta}$. Observo eam extendi ad fractiones, quarum numeratores M sunt functiones irrationales ipsius x, et generaliorem esse ea, quam Moivraeus ex doctrina serierum recurrentium deduxit in Miscellaneis analyticis. Sed in hoc Tibi non assentior, quod existimes omnem quantitatem algebraicam, si non in factores simplices reales $\alpha + \beta x$, saltem in factores trinomiales $\alpha + \beta x + \gamma x x$, qui omnes sint reales, resolvi posse, et radices imaginarias aequationum semper ita comparatas esse, ut binae in se multiplicatae productum reale praebeant. Ex. gr. hujus quantitatis $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4$ nulli dantur factores reales duarum dimensionum, nec aequationis

$$x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4 = 0$$

quatuor radices $x = 1 + \sqrt{(2 + \sqrt{-3})}$, $x = 1 - \sqrt{(2 + \sqrt{-3})}$, $x = 1 + \sqrt{(2 - \sqrt{-3})}$, $x = 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{-3})}$ ita sunt comparatae, ut binae earum in se multiplicatae productum reale constituant.

Elegans est theorema, quod dividendo unitatem per productum $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)$ etc. oriatur series $1 + 1n + 2n^2 + 3n^3 + 5n^4 + 7n^5 + 11n^6 + 15n^7 + 22n^8 + 30n^9 + 42n^{10} + 56n^{11} +$ etc. in qua cujuslibet termini coëfficiens indicat, quot variis modis exponens ipsius n per additionem componi possit. Vix credo dari posse terminum generalem hujus seriei, at legem progressionis ostendi et terminos sequentes ex praecedentibus levi negotio conflari posse existimo; en pro hac re novam speciem trianguli arithmetici cujus talis est constructio:

1. I.

1. 1. II.

0. 1. 2. III.

0. 1. 1. 3. IV.

0. 0. 1. 1. 5. V.

0. 0. 1. 1. 2. 7. VI.

0. 0. 0. 1. 1. 2. 11. VII.

0. 0. 0. 1. 1. 1. 4. 15. VIII.

0. 0. 0. 0. 1. 1. 2. 4. 22. IX.

0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 2. 7. 30. X.

0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 3. 8. 42. XI.

0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 2. 4. 12. 56. XII.

0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 2. 5. 14. 77. XIII.

0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 1. 3. 6. 21. 101. XIV.

Quaelibet series horizontalis incipit ab unitate praefixis tot cyphris, quot unitates continentur in dimidio numeri, qui exponit quotum seriei unitate vel binario minutum; sic series horizontalis VIIma incipit a 0. 0. 0. 1. Ex numeris cujuslibet seriei horizontalis formantur numeri illius seriei verticalis, cui imminet numerus romanus seriei horizontali adscriptus hoc modo: Summa totius seriei horizontalis dat primum terminum seriei verticalis, ex gr. summa seriei VIImae 0. 0. 0. 1. 1. 2. 11 dat 15; eadem summa, demto ultimo termino seriei horizontalis, praebet secundum terminum seriei verticalis, ex gr. $15 - 11 = 4$; ab hoc numero si dematur penultimus ejusdem seriei horizontalis, residuum erit tertius numerus seriei verticalis, ex. gr. $4 - 2 = 2$; ab hoc si dematur antepenultimus seriei horizontalis, remanet quartus in serie verticali, ex. gr. $2 - 1 = 1$, et ita porro; sed quam primum pervenitur ad unitatem, nihil amplius subtrahendum est, sed reliqui omnes loci vacui in serie verticali per unitatem sunt supplendi. Usus trianguli hic est: Primus terminus cujusque seriei verticalis ostendit quot modis per additionem componi possit numerus romanus eidem superscriptus; sic VIII 22 modis componi potest; idemque tanquam ultimus in serie IX horizontali ostendit quot modis numerus IX componi potest ita, ut maximus componentium semel tantum sumatur; penultimus in serie IX horizontali, nempe 4, ostendit quot modis numerus IX componi potest ita, ut maximus componentium bissumatur; antepenultimus in eadem serie, nempe 2, ostendit quot modis dictus numerus IX componi potest ita, ut maximus componentium ter sumatur, et ita deinceps. Ecce alium modum:

0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.
1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
	1.	1.	1.	2.	2.	3.	3.	4.	4.	5.	5.	6.	6.
		2.	1.	1.	2.	3.	4.	5.	7.	8.	10.	12.	14.
			3.	1.	1.	2.	3.	5.	6.	9.	11.	15.	18.
				5.	1.	1.	2.	3.	5.	7.	10.	13.	18.
					7.	1.	1.	2.	3.	5.	7.	11.	14.
						11.	1.	1.	2.	3.	5.	7.	11.
							15.	1.	1.	2.	3.	5.	7.
								22.	1.	1.	2.	3.	5.
									30.	1.	1.	2.	3.
										42.	1.	1.	2.
											56.	1.	1.
												77.	1.
													101.

In isto triangulo numeri ita sunt formati: In prima serie horizontali sub numeris romanis scribitur 1. cum meris cyphris; sub his merae unitates; duo priores numeri secundae seriei horizontalis repetuntur in tertia, tres priores hujus repetuntur in quarta, quatuor priores quartae repetuntur in quinta et sic porro. Quilibet terminus alicujus seriei verticalis est aequalis summae aliquot terminorum alius seriei verticalis, quae anterior est tot locorum intervallo uno demto, quotus ipse terminus quaesitus est in sua serie, et idem quotus ostendit quot termini in serie anteriori addi debeant, si modo tot sumi possint, si non, integra series anterior accipienda est; sic sextus numerus seriei verticalis 0. 1. 6. 12. 15. 13. 11. 7 etc. hoc est $13 = 0 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2$, quae series anterior est quinque locorum intervallo. Usus: Summa cujuslibet seriei verticalis ostendit quot modis per additionem componi potest numerus romanus eidem superscriptus; secundus terminus ejusdem seriei ostendit unicum modum, quo idem numerus ex unitatibus componitur; tertius ostendit quot modis idem componitur ita, ut maximus componentium sit 2; quartus, quot modis ita, ut maximus componentium sit 3; quintus, quot modis ita, ut maximus componentium sit 4; et sic porro. Sed haec Tibi jam nota esse nullus dubito, ut et quod series horizontales praebeant coëfficientes terminorum ortorum ex divisione unitatis per $(1-n)(1-nn)(1-n^3)$ etc.

In hac serie

$$n^0 - n^1 - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} - \text{etc.}$$

quam invenisti aequalem producto $(1-n)(1-nn)(1-n^3)$ etc. expanso, differentiae exponentium progrediuntur ita 1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, etc. qui numeri alternatim depromti sunt ex serie 1, 3, 5, 7, 9, etc. et ex serie 1, 2, 3, 4, 5, etc. quae proprietas fortassis ex natura rei nec solum per inductionem demonstrari poterit; sed in hanc rem inquirere nunc non vacat.

Valde mihi placet methodus inveniendi et summandi series per differentiationem et integrationem, eamque ulterius extendi posse existimo. Exemplum quod affers in fine litterarum Tuarum inverso ordine melius, ni fallor, demonstraturus fuisses, qua ratione demonstratio simul vice investigationis a priori fuisset. Si enim sit

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{aa}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.} = 1 + \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \frac{x^{3n}}{3n+1} + \text{etc.}$$

erit $sx = x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \text{etc.}$;

$$d.sx = (1 + x^n + x^{2n} + \text{etc.})\,dx;\quad sx\,d.sx =$$

$$\left(x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \text{etc.}\right)(1 + x^n + x^{2n} + \text{etc.})\,dx =$$

$$\left(x + x^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + x^{2n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + x^{3n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right) + \text{etc.}\right) dx$$

et integrando

$$\tfrac{1}{2}ssxx = \tfrac{1}{2}xx + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{x^{3n+2}}{3n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right) + \text{etc.}$$

seu

$$\tfrac{1}{2}ss = \tfrac{1}{2} + \frac{x^n}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n}}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{x^{3n}}{3n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right) + \text{etc. Q. E. D.}$$

Multiplicando aequationem

$$\tfrac{1}{2}ssxx = \tfrac{1}{2}xx + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \text{etc.}$$

per $d.sx$ et dividendo ejus integralem per x^3, invenitur simili modo

$$\tfrac{1}{6}s^3 = \tfrac{1}{6} + \frac{x^n}{n+3}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) +$$
$$\frac{x^{2n}}{2n+3}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right)) +$$
$$\frac{x^{3n}}{3n+3}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{3n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right)\right) + \text{etc.}$$

Et ita porro ad altiores potestates ascendi potest.

Reliqua Tua pulcherrima theoremata, quae abstrusioris sunt indaginis examinabo quando mihi plus otii suppetet. Interim vale et mihi fave. Dabam Basileae d. 24. Octbr. 1742.

$\frac{1}{+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\Big) +$

$\frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)\Big)+$

$\frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)+$

$\overline{\cdot 1} + \frac{1}{3n+1}\Big)\Big) +$ etc.

es ascendi potest.

ieoremata, quae abstrusioris
lo mihi plus otii suppetet.

Basileae d. 24. Octbr. 1742.

LETTRE III.

SOMMAIRE. Signification des séries infinies. Décomposition des quantités algébriques en facteurs. Controverse entre Bouguer et Fontaine.

Celeberrimo viro LEONHARDO EULERO S. P. D.
NIC. BERNOULLI.

Ut mihi gratiam facias responsionis justae, quam debeo litteris Tuis humanissimis jam ante 4 menses ad me datis, est quod Te enixe oro. Ita enim variis districtus sum negotiis, ut parum operae dare possim profundis meditationibus aut laboriosissimis investigationibus, quales requirere videntur materiae ab acri Tuo ingenio proponi solitae. Bona igitur Tua cum venia paucissimis me nunc expediam.

Miror me Tibi non intelligi in re levicula, quae Tibi ignota non est; mihi enim persuadere non possum Te statuere, seriem divergentem, cui licet in infinitum continuatae semper aliquid deest, dare exacte valorem quantitatis in seriem resolutae. Quemadmodum ex. gr. $\frac{1}{1-x}$ non est $=$ $1+x+xx+x^3+\ldots+x^\infty$, sed $= 1+x+xx+x^3+\ldots+x^\infty+\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$, ita quoque sinus arcus elliptici s non est $= s-\frac{s^3}{6c^4}+$ etc. sed $= s-\frac{s^3}{6c^4}+$ etc. $+$ vel $-$ functione aliqua infiniti gradus arcus s. Quamvis igitur iste sinus, ut in circulo, fortasse etiam sit $= s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)$etc., non tamen series $s-\frac{s^3}{6c^4}+$ etc. eidem producto aequalis erit, in qua conclusione nos ambo convenimus.

Recte se habet methodus Tua inveniendi factores trinomiales quantitatis algebraicae ope angulorum, sed eadem, sicut omnes aliae methodi hic adhibendae, necessario requirit resolutionem aequationum altioris gradus, quae rarissime expedite conficitur. At erravi, quando in posterioribus meis litteris negavi, omnem quantitatem algebraicam, et in specie hanc $x^4-4x^3+2xx+4x+4$ in factores trinomiales reales resolvi posse. Erroris ansa haec fuit: Sciebam Cartesium docuisse modum resolvendi aequationem biquadraticam

$$x^4+px^3+qxx+rx+s=0$$

in duas quadraticas $xx+yx+t=0$ et $xx-yx+u=0$ ope aequationis cubicae vel aequationis sex dimensionum, in qua potestates impares coëfficientis y deficiunt, et porro sciebam unam ad minimum radicem hujus aequationis cubicae, quae est yy, esse realem, sed quia credebam, eam radicem posse esse negativam, concludebam y tunc fore quantitatem imaginariam; et in exemplo a me allegato aggregatum radicum $x=1+\sqrt{(2+\sqrt{-3})}$ et $x=1+\sqrt{(2-\sqrt{-3})}$, vel radicum $x=1-\sqrt{(2+\sqrt{-3})}$ et $x=1-\sqrt{(2-\sqrt{-3})}$ absque ulteriori examine quantitatem imaginariam esse putabam. Sed a Te monitus et re accuratius examinata, comperi aequationem praedictam cubicam semper habere unam radicem yy realem affirmativam, quin etiam ipsum modum addendi quantitates $1+\sqrt{(2+\sqrt{-3})}$ et $1+\sqrt{(2-\sqrt{-3})}$ detexi. Sententia igitur mutata nunc affirmo, assertum Tuum demonstrari posse, dummodo cencedatur (quod nemo negabit) omnem quantitatem imaginariam considerari posse instar functionis alicujus vel aggregati plurium functionum quantitatis vel quantitatum hanc formam habentium $b\pm\sqrt{-a}$, ubi b significiat quantitatem realem vel 0, et a quantitatem realem affirmativam; jam vero omnes potestates, radices, functiones binomii $b\pm\sqrt{-a}$, et aggregata plurium ejusmodi functionum, ad simile binomium $B\pm\sqrt{-A}$ reduci possunt, unde sequitur, in omni aequatione algebraica radices imaginarias habente, quaelibet paria radicum cognatarum hac forma exprimi posse $x-B-\sqrt{-A}=0$ et $x-B+\sqrt{-A}=0$, adeoque ipsam aequationem in factores trinomiales reales hujus formae $xx-2Bx+BB+A=0$ resolubilem esse. Ex. gr. si ponatur $\sqrt{(b\pm\sqrt{-a})}=B\pm\sqrt{-A}$, erit

$$b\pm\sqrt{-a}=BB-A\pm2B\sqrt{-A};$$

quare si fiat $b=BB-A$ et $\sqrt{-a}=2B\sqrt{-A}$, seu $a=4ABB$, habebitur $BB=b+A$, et $a=4ABB=4bA+4AA$, hinc $A=\frac{-b+\sqrt{(bb+a)}}{2}$ et $BB=b+A=\frac{b+\sqrt{(bb+a)}}{2}$; posito igitur $b=2$, $a=3$, erit

$$A=\frac{-2+\sqrt{7}}{2},\ BB=\frac{2+\sqrt{7}}{2},\ \text{et}\ B=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{7})}}{\sqrt{2}}.$$

Sic si ponatur $\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{-a})}=B\pm\sqrt{-A}$, erit

$$b\pm\sqrt{-a}=B^3\pm3BB\sqrt{-A}-3AB\mp A\sqrt{-A};$$

quare si fiat $b=B^3-3AB$, et $\sqrt{-a}=(3BB-A)\sqrt{-A}$,

$$\text{seu } a=9AB^4-6AABB+A^3,$$

habebitur per priorem aequationem $A=\frac{B^3-b}{3B}$, quo valore in posteriore substituto, erit $27 a B^3 = 64 B^9 - 48 b B^6 - 15 b b B^3 - b^3$, vel $27 b b B^3 + 27 a B^3 = 64 B^9 - 48 b B^6 + 12 b b B^3 - b^3$, et extrahendo radicem cubicam $3 B \sqrt[3]{(b b + a)} = 4 B^3 - b$; quae aequatio cum sit cubica et imparium dimensionum, sequitur B, et per consequens etiam $A = \frac{B^3 - b}{3 B}$ habere ad minimum unum valorem realem.

Jam a longo tempore non vidi Commentarios Acad. Reg. Gall.; hinc ignota mihi fuit controversia inter D. Bouguer et D. de la Fontaine agitata de inventione theorematis, quod mihi acceptum refers. Ego quidem hac in re nullius inventionis gloriam mihi tribuo, utpote qui proprietatem illam formularum differentialium, quae huic controversiae ansam dedit, non instar theorematis proposui, sed instar axiomatis supposui, quod ex sola notione differentialium, etiam sine inspectione figurae, cuivis manifestum esse putabam. Vid. Suppl. Act. Lips. Tom. VII. pag. 311 ibi: *nunc hoc idem* $d d y$ etc. et pag. 312 ibi: *unde aequatis his duobus valoribus ipsius* $d d x$ etc. Adhibita autem figura, haec proprietas statim in oculos incurrit. Si enim sit (Fig. 60) $A E = C F = dx$ et $B E = P\, dx$ posita y constante, et $C A = Q dy$ posita x constante, erit differentiale ipsius $P dx$ posita y variabili et x constante $= D F - B E = D B - F E = D B - C A =$ differentiali ipsius $Q\, dy$ posita x variabili et y constante. Quia super ista proprietate differentialium fundata est constructio trajectoriarum orthogonalium a me exhibita in Actis Lips. 1719 pag. 295 et seqq. communicabo hic Tecum ejusdem constructionis demonstrationem analyticam, quam olim concinatam nondum publici juris feci. Sint (Fig. 61) curvae secandae DEF, GHI, curva has ad angulos rectos secans HF, ipsarumque coordinatae communes AB, $AC = y$, BE vel BH, aut CF vel $CI = x$, sitque aequatio curvarum secandarum generalis $dx = p\,dy + q\,da$, ubi a significat parametrum variabilem, sive lineam, ex cujus mutatione mutatur curva secanda; p vero et q sunt quantitates datae per x, y, a et constantes. Sit porro ∂ nota differentialium quando a constans ponitur, et δ nota differentialium quando y constans ponitur. Quia curva HF secat curvas DEF, GHI ad angulos rectos, subtangens curvarum DEF, GHI eadem est ac subnormalis curvae secantis HF, id est, $\frac{x}{p} = \frac{-x\,dx}{dy}$, sive $dy = -p\,dx$, quae est aequatio generalis curvarum HF, in qua si pro dx substitutatur ejus valor $p\,dy + q\,da$ orietur

$$dy = -pp\,dy - pq\,da, \text{ vel } \frac{dy}{da} = -\frac{pq}{1+pp}.$$

Eadem aequatio etiam sic invenitur: Quia triangulum EFH est rectangulum, erit $HE^2 = EF^2 + HF^2$, sed
$HE^2 = \delta x^2 = qq\,da^2$, $EF^2 = \partial x^2 + dy^2 = pp\,dy^2 + dy^2$,
$HF^2 = dx^2 + dy^2 = pp\,dy^2 + 2pq\,dy\,da + qq\,da^2 + dy^2$,
hinc $qq\,da^2 = 2pp\,dy^2 + 2pq\,dy\,da + qq\,da^2 + 2dy^2$, subtrahendo $qq\,da^2$ et postea per $2dy$ dividendo, orietur

$$0 = dy + pp\,dy + pq\,da,$$

ut antea. Quia vero quantitas q in curvis secandis transcendentibus non data est, tentari debet ejus eliminatio per sequentem considerationem, in qua valor lineolae IF duplici modo invenitur. Nimirum $IF = HE + \partial HE = \delta x + \partial\delta x$, sed est quoque $IF = \delta CF = \delta BE + \delta\partial BE = \delta x + \delta\partial x$, hinc ablato utrinque δx, erit $\partial\delta x = \delta\partial x$, id est (quia $\delta x = q\,da$, et $\partial x = p\,dy$) $\partial q\,da = \delta p\,dy$, hinc $\partial q = \frac{\delta p\,dy}{da}$, cujus integrale haberi potest, saltem per quadraturas, si x non ingrediatur quantitatem δp; debet autem in integratione addi talis quantitas ex a et aliis constantibus composita, ut in casu $AB = y = 0$, HE sive $q\,da$ evadat $GD = \delta AD$; datur autem recta AD ob datam positionem curvarum secandarum in a et constantibus, quae si ponatur $= E$, erit in casu $y = 0$, $q = \frac{dE}{da}$. Si modo inventa aequatio differentialis $\partial q = \frac{\delta p dy}{da}$ comparetur cum aequatione curvae HF supra inventa $\frac{dy}{da} = \frac{-pq}{1+pp}$, reperietur $\frac{-\partial q}{q} = \frac{p \delta p}{1+pp}$, quae aequatio inserviet ad inveniendam curvam LMN pro qualibet curva secanda GHI, ut abscindendo aream datae magnitudinis $ALMB$, ordinata MB producta secet curvam GHI in puncto aliquo H trajectoriae quaesitae HF. Sit ordinata curvae construendae $BM = z$ respondens abscissae $AB = y$. Appelletur area $ALMB = S$, sitque generaliter $dS = z dy + u da$, eritque ut supra $\partial \delta x = \delta \partial x$, ita hic $\partial \delta S = \delta \partial S$, id est $\partial u da = \delta z dy$; quia vero $\delta S = u da$, et in casu $y = 0$ omnes areae $ALMB$ evanescunt, evanescet quoque δS, adeoque in casu $y = 0$ erit $u = 0$. Ponatur $z = \frac{1+pp}{pn}$, et area abscindenda $ALMB = C - A$, ubi C significet quantitatem constantem et A quantitatem inveniendam compositam ex a et constantibus, sitque $dA = bda$; et erit $dS = zdy + uda = dC - dA = -bda$, sive

$$\frac{dy}{da} = \frac{u+b}{-z} = \frac{-pq}{1+pp},$$

hinc $z = \frac{(u+b)(1+pp)}{pq} = \frac{1+pp}{pn}$, et $u + b = \frac{q}{n}$, et $\partial u = \frac{n\partial q - q\partial n}{nn}$; et quia in casu $y = 0$ est $u = 0$, erit in hoc casu $b = \frac{q}{n} =$ (si m ponatur $= n$ in casu $y = 0$) $\frac{dE}{mda}$, et $bda = dA = \frac{dE}{m}$, Sed supra inventa est aequatio $\partial u da = \delta z dy$ sive

$$\frac{dy}{da} = \frac{\partial u}{\delta z} = \frac{-pq}{1+pp} = \frac{-q}{nz},$$

hinc $\frac{\delta z}{z} = \frac{-n\partial u}{q} = -\frac{\partial q}{q} + \frac{\partial n}{n} = \left(\text{quia } \frac{-\partial q}{q} = \frac{p\delta p}{1+pp}\right)$ $\frac{p\delta p}{1+pp} + \frac{\partial n}{n} = \left(\text{ob } z = \frac{1+pp}{pn}\right) \frac{2p\delta p}{1+pp} - \frac{\delta p}{p} - \frac{\delta n}{n}$, id est (quia $d n = \partial n + \delta n$) $\frac{dn}{n} = \frac{p\delta p}{1+pp} - \frac{\delta p}{p} = \delta \log. \frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}$, quod est illud ipsum, quod praecipit constructio tradita in Actis Lips. loco citato. Sed hic filum scriptionis abrumpo, reliqua pulcherrima epistolae Tuae contenta examinaturus, cum otium, quo maxime indigeo, nactus fuero. Vale.

Dabam Basileae die 6. Aprilis 1743.

LETTRE IV.

SOMMAIRE. Considérations sur les sommes des séries divergentes. Racines imaginaires des équations. Résolution des quantités algébriques en diviseurs trinomiaux réels, et des équations de degrés supérieurs en équations quarrées. Théorème de calcul différentiel.

Viro Celeberrimo LEONH. EULERO S. P. D. NIC. BERNOULLI.

Patruelem meum et Cl. Wentzium rogavi, ut tarditatem responsionis meae ad postremam Tuam epistolam apud Te in suis litteris excusarent, quod factum, ut spero, benigne accipies. Ne autem omnino desim officio meo, responsionis loco pauca quaedam monebo. Ne disputatio nostra de summis serierum divergentium in logomachiam abeat, opus est, ut mentem meam Tibi clarius aperiam. Ideam summae seu aggregati plurium terminorum non posse copulari existimo cum idea terminorum sine fine progredientium, et has duas ideas contradictorias esse statuo; illa involvit conceptum terminorum omnium, primi, ultimi et mediorum, in ista autem non involvitur conceptus ultimi, sed mens a cogitatione ɪE IV.

nmes des séries divergentes. Racines
ion des quantités algébriques en divi-
ions de degrés supérieurs en équations
entiel.

LERO S. P. D. NIC. BERNOULLI.

zium rogavi, ut tarditatem
n Tuam epistolam apud Te
factum, ut spero, benigne
im officio meo, responsionis
e disputatio nostra de sum-
gomachiam abeat, opus est,
eriam. Ideam summae seu
on posse copulari existimo
rogredientium, et has duas
illa involvit conceptum ter-
et mediorum, in ista autem
, sed mens a cogitatione

ultimi, et per consequens etiam a collectione primi, mediorum et ultimi abstrahitur. Hinc distinctionem inter infinitum absolutum et infinitum determinatum non admitto, sed omne infinitum, quod calculum ingreditur, tanquam determinatum concipi debere contendo, et hinc quoque proprietates aequationum finitarum algebraicarum, quod ex. gr. coëfficens secundi termini negative sumtus sit aequalis summae omnium radicum, etc. non recte applicari existimo ad aequationes habentes terminos sine fine progredientes, quorum nullus ut ultimus consideratur, et in quibus aequationibus per consequens neque numerus neque summa radicum concipi potest. Seriei $1 - 3 + 5 - 7 +$ etc. summa exprimitur per ultimum terminum hujus seriei $1 - 2 + 3 - 4 +$ etc. et quando nullus concipi potest hujus seriei ultimus terminus, nulla etiam concipi poterit summa prioris seriei, aut si velis illa summa erit $= - \infty . - 1^{\infty}$, non autem $= 0$, a quo valore series $1 - 3 + 5 - 7 +$ etc. tanto magis recedit, quanto magis continuatur, quamvis illa formetur ex quantitate $\frac{1-1}{1+2+1} = 0$. Sic etiam series $1 + 2 + 4 + 8 + 16 +$ etc. formata ex quantitate $\frac{1}{1-2} = -1$, revera non est $= -1$. At dicis ejusmodi summationes Te nunquam in errorem deduxisse, et memini quoque me ipsum ejusmodi summationibus usum fuisse in investiganda summa seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. Jam vero hoc est id ipsum, quod innuere volebam in prima mea ad Te data epistola, cum dicebam posse aliquid contra meam methodum objici, quod explanatione opus habeat, quia multis absonum videbitur, seriem infinitam numerorum affirmativorum continue crescentium aequalem poni numero negativo finito. Existimo igitur, respondendum esse, quod ejusmodi serierum divergentium fictitiae summationes in errorem non deducant tunc, quando per seriem divergentem intelligi debet quantitas aliqua in seriem resoluta, vel tunc, quando sine respectu ad quantitates, unde series divergentes oriuntur, plures ejusmodi series in calculo occurrunt, et residua infinita in summatione neglecta se invicem destruunt. Aliis vero in casibus ejusmodi summationes facile in errorem deducere possunt. Ex. gr. series recurrens

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + \text{etc.}$$

formatur ex quantitate $\frac{1}{1-1-1} = -1$, et series geometrica $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{etc.}$ ex quantitate $\frac{1}{1-2} = -1$, non tamen hinc concludi debet ambas istas series esse aequales, cum singuli termini hujus, excepto primo, sint majores singulis terminis illius, differentia magis et magis crescente, quippe differentiae constituunt hanc seriem

$$0 + 1 + 2 + 5 + 11 + 24 + \text{etc.}$$

ortam ex quantitate $\frac{1-1}{1-3+1+2} = 0$. Sic quoque absurdum esset dicere, seriem recurrentem $1 + 3 + 8 + 19 + 43 + \text{etc.}$ aequalem esse soli primo termino, totum aequale minimae parti, attamen illa formatur ex quantitate $\frac{1}{1-3+1+2} = 1$.

Quicunque negare vult, radices imaginarias aequationum considerari posse tanquam functiones binomiorum hujusmodi $a + \sqrt{-b}$, eodem jure negare debet, aequationes imparium dimensionum semper habere ad minimum unam radicem realem, et numerum radicum imaginariarum semper esse parem; utraque enim assertio eodem recidit, et numerus radicum imaginariarum ideo par esse statuitur, quia in formationem illarum ingredi censetur latus quadratum quantitatis negativae.

Modus, quem affers resolve
divisores trinomiales reales, no
qui irrepserunt in calculum Tu
$x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$ d
$xx + \gamma x + \delta = 0$. Pro aequ
α et γ, debet poni $zz - pz + u$
radices sunt β et δ, debet poni
$zz + pz + u = 0$ et $zz + tz$ -
scripsisti. Deinde ex aequati
$p = \alpha + \gamma$, $q = \beta + \delta + \alpha\gamma = t$ -
invicem comparatis, resultat ae
$rr - prt + pps +$
non vero haec $rr - prt + p$
substituendo $q - t$ pro u habe
$t^3 - qtt + (pr - 4s)t -$
loco Tuae
$t^3 - qtt - (pp - pr +$
Quamvis igitur t et u habeant
dum tamen sequitur radices a
et $zz - tz + s = 0$, nempe
demonstretur $\frac{1}{4}pp - u$ et $\frac{1}{4}tt -$
Idem dicendum est de aequati
in qua licet quantitates A, B,
imparis gradus, tamen adhuc
dices z, quas ponis esse α, γ,
qua sex dimensionum $x^6 + px^5$
per tres divisores reales $xx +$
et $xx + \varepsilon x + \zeta = 0$. Melius i
Cartesii tollendo secundum ter
et quaerendo ipsas quantitates
mas vel producta. Sit ex. gr. a

Modus, quem affers resolvendi quantitates algebraicas in divisores trinomiales reales, non est perfectus, et errores aliqui irrepserunt in calculum Tuum. Sint ex. gr. aequationis $x^4+px^3+qxx+rx+s=0$ divisores $xx+\alpha x+\beta=0$ et $xx+\gamma x+\delta=0$. Pro aequatione, quae continet radices α et γ, debet poni $zz-pz+u=0$, et pro aequatione, cujus radices sunt β et δ, debet poni $zz-tz+s=0$, non autem $zz+pz+u=0$ et $zz+tz+s=0$, uti ex inadvertentia scripsisti. Deinde ex aequationibus $\alpha\gamma=u$, $\beta+\delta=t$, $p=\alpha+\gamma$, $q=\beta+\delta+\alpha\gamma=t+u$, $r=\alpha\delta+\beta\gamma$ et $s=\beta\delta$, invicem comparatis, resultat aequatio

$$rr-prt+pps+ttu-4su=0,$$

non vero haec $rr-prt+ppt+ttu-4su=0$, unde substituendo $q-t$ pro u habetur aequatio ista

$$t^3-qtt+(pr-4s)t-rr-pps+4qs=0,$$

loco Tuae

$$t^3-qtt-(pp-pr+4s)t-rr+4qs=0.$$

Quamvis igitur t et u habeant unum valorem realem, nondum tamen sequitur radices aequationum $zz-pz+u=0$ et $zz-tz+s=0$, nempe α, γ, β et δ esse reales, nisi demonstretur $\frac{1}{4}pp-u$ et $\frac{1}{4}tt-s$ esse quantitates affirmativas. Idem dicendum est de aequatione $z^3+Azz+Bz+C=0$, in qua licet quantitates A, B, C definiantur per aequationem imparis gradus, tamen adhuc demonstrandum est singulas radices z, quas ponis esse $\alpha, \gamma, \varepsilon$, esse reales, ut aequatio aliqua sex dimensionum $x^6+px^5+qx^4+$ etc. $=0$ divisibilis sit per tres divisores reales $xx+\alpha x+\beta=0$, $xx+\gamma x+\delta=0$, et $xx+\varepsilon x+\zeta=0$. Melius igitur res conficitur per modum Cartesii tollendo secundum terminum aequationis resolvendae, et quaerendo ipsas quantitates $\alpha, \gamma, \varepsilon$ etc., non ipsarum summas vel producta. Sit ex. gr. aequatio $x^4+qxx+rx+s=0$

resolvenda in $xx + \alpha x + \beta = 0$ et $xx - \alpha x + \delta = 0$, invenitur

$$\beta = \frac{\alpha^3 + q\alpha - r}{2\alpha},\ \delta = \frac{\alpha^3 + q\alpha + r}{2\alpha},\ \beta\delta = s = \frac{\alpha^6 + 2q\alpha^4 + qq\alpha\alpha - rr}{4\alpha\alpha}$$

seu $\alpha^6 + 2q\alpha^4 + (qq - 4s)\alpha\alpha - rr = 0$. Jam vero hujus aequationis cubicae radices $\alpha\alpha$ vel omnes sunt reales, vel una tantum; si omnes sint reales, non possunt esse singulae negativae, quia ultimus aequationis terminus $-rr$ est quantitas negativa; sin una tantum radix sit realis, illa necessario erit affirmativa, quia aequationis quadratae, quae alteras duas radices imaginarias continet, ultimus terminus debet esse affirmativus. Dabitur ergo unus valor realis affirmativus ipsius $\alpha\alpha$, per consequens singulae quantitates α, β, δ habebunt valorem aliquem realem. Aequationum altioris gradus resolutiones in aequationes quadratas dependent omnes a resolutione aequationis

$$x^{2^n} + p\,x^{2^n - 1} + q\,x^{2^n - 2} + \text{etc.} = 0$$

in qua exponens altissimi termini est potestas aliqua numeri binarii. Nam si sit m numerus quicunque impar, et aequatio proposita

$$x^{m \cdot 2^n} + p\,x^{m \cdot 2^n - 1} + \text{etc.} = 0,$$

haec semper pro divisore habebit aequationem

$$x^{2^n} + \alpha x^{2^n - 1} + \text{etc.} = 0,$$

in qua coëfficiens secundi termini α semper determinabitur per aequationem gradus imparis. Aequatio vero generalis

$$x^{2^n} + p x^{2^n - 1} + q\,x^{2^n - 2} + \text{etc.} = 0,$$

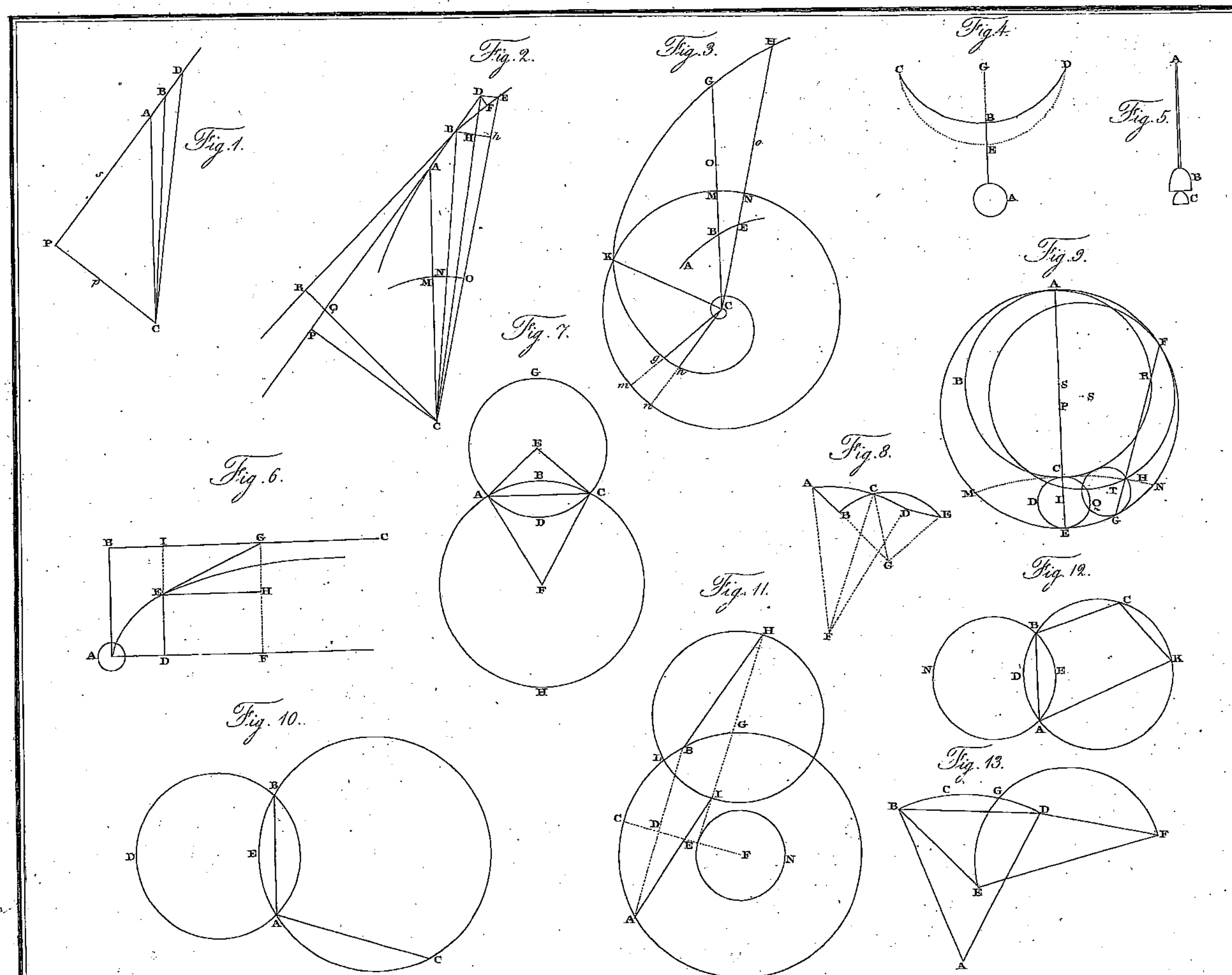
sublato secundo termino, ad dimidium numerum dimensionum reduci potest et resolvi in duas

$$x^{2^{n-1}} + \alpha x^{2^{n-1} - 1} + \text{etc.} = 0 \text{ et } x^{2^{n-1}} - \alpha x^{2^{n-1} - 1} + \text{etc.} = 0,$$

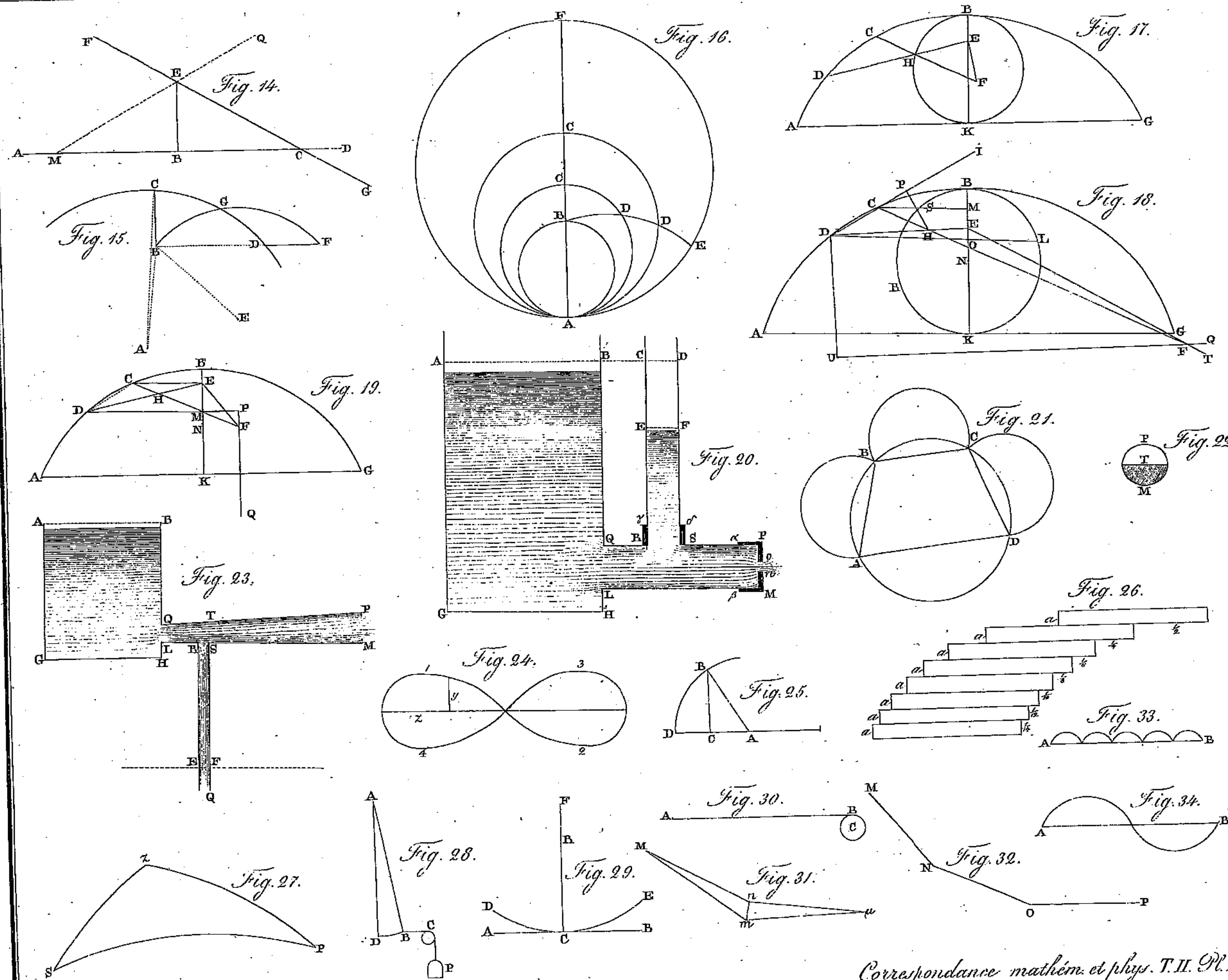
ubi $\alpha\alpha$ semper determinabitur per aequationem imparis gradus;

tota igitur difficultas demonstrationis, quod omnis aequatio algebraica resolvi possit in aequationes quadratas reales, eo reducitur, ut demonstretur quantitatem $\alpha\alpha$ semper esse affirmativam. Ita resolutio aequationis octo dimensionum in duas biquadraticas, et harum porro in aequationes quadratas, perfici poterit inventa radice aequationis 35 dimensionum, neque ad eam rem opus est aequatione $1.\,3.\,5.\,7 = 105^{ti}$ gradus. Sed quis quaeso mortalium resolvet ejusmodi aequationes? quare speculationem hanc magis curiosam quam utilem esse existimo.

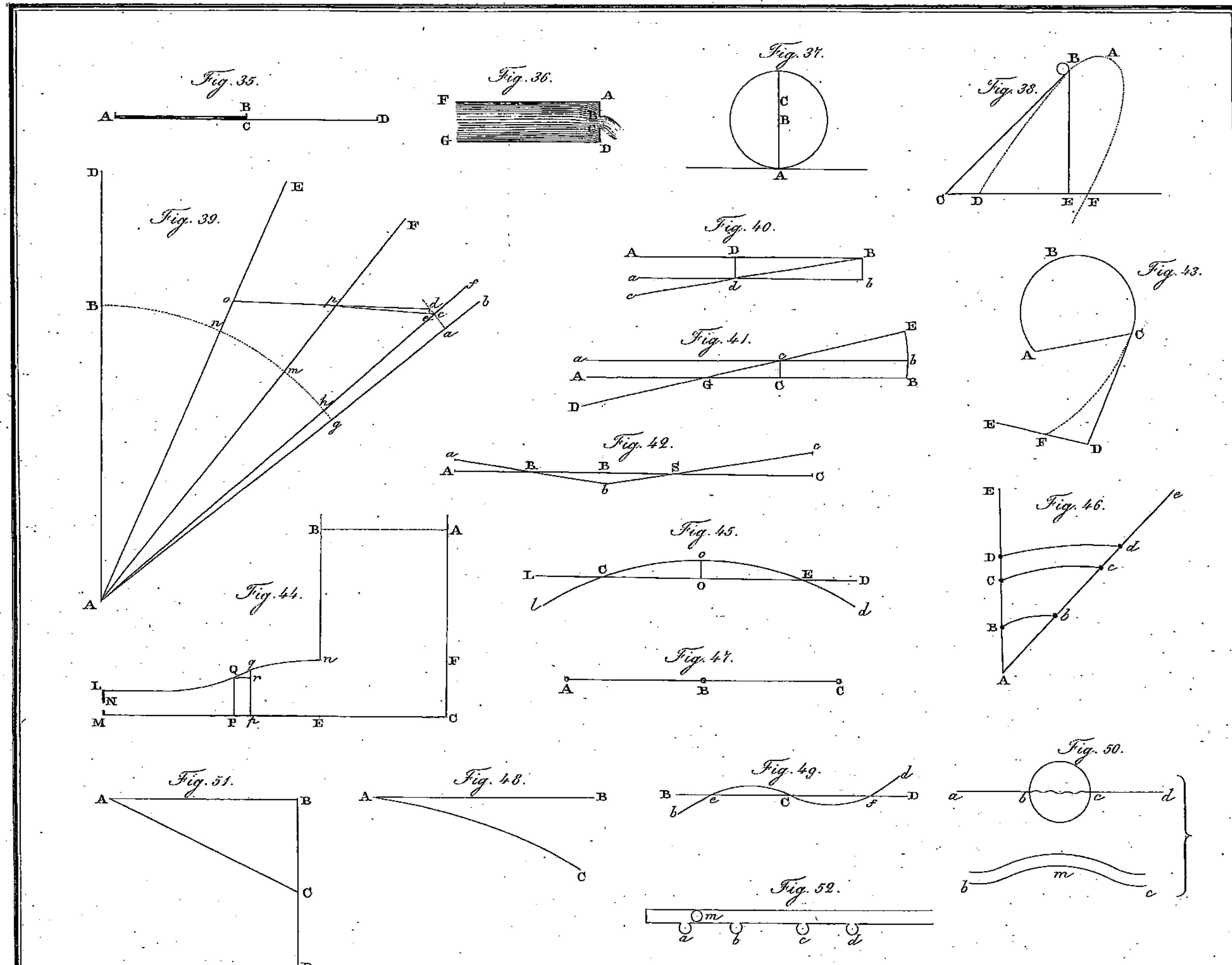
Theorema illud, cujus inventionem mihi asseruisti, nempe de aequalitate differentialium ipsius Pdx et Qdy, potest quidem usum non exiguum habere in integrandis aequationibus differentialibus, sed ego non ausim hanc utilitatem eousque extendere, ut credam, omnem aequationem differentialem hujus formae $PRdx + QRdy = 0$ integrationem admittere, quoties facta differentiali ipsius $PRdx$ (ponendo x constantem) aequali differentiali ipsius $QRdy$ (ponendo y constantem), quantitas R determinari potest. Verum quidem est, si quantitas quaedam integralis finita pro differentiali habeat $PRdx + QRdy$, tunc fore $d.PRdx = d.QRdy$; sed dubito, an hujus propositionis conversa etiam sit vera. Caeterum facile perspicies hoc problema: Data aequatione differentiali $P\,dx + Q\,dy = 0$, invenire quantitatem R, ita ut $d.PRdx$ sumta x constante sit $= d.QRdy$ sumta y constante, — non differe ab hoc problemate: Data aequatione differentiali incompleta $dx = pdy$, invenire ejus completam $dx = pdy + qda$, quod a me solutum extat in Act. Lips. loco in praecedentibus meis litteris allegato. Vale et levia ista monita boni consule. Dabam Basileae d. 29 Novembris 1743.



Correspondance mathém. et phys. T. II. Pl. 1.



Correspondance mathém. et phys. T. II. Pl. 2.



Correspondance mathém et phys. T.II. Pl. 3.

Fig. 53.

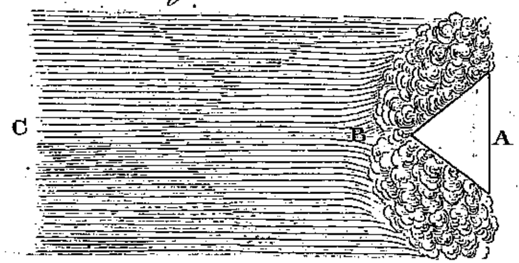


Fig. 54.

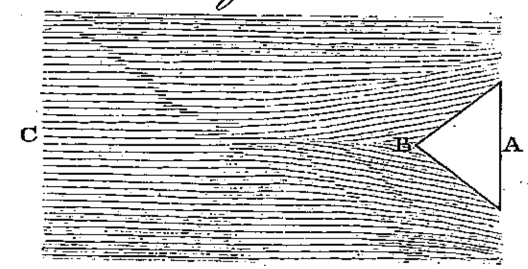


Fig. 58.

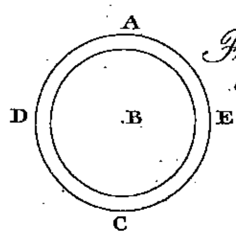


Fig. 57.

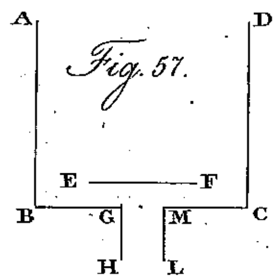


Fig. 56.

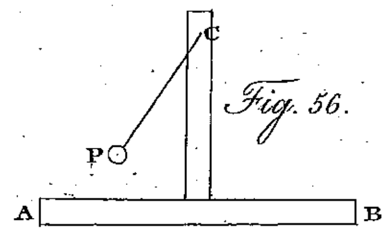


Fig. 55.

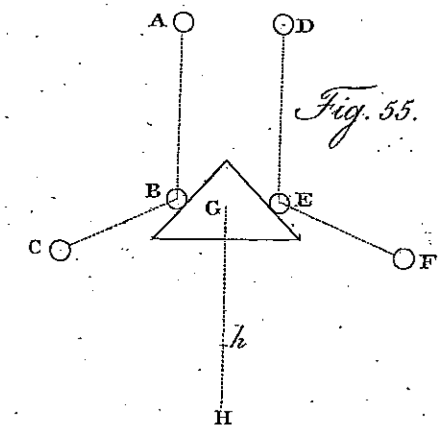


Fig. 59.

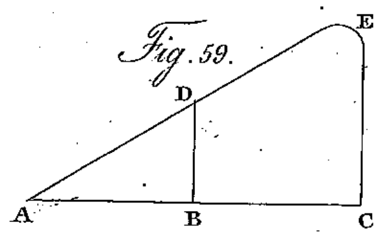


Fig. 61.

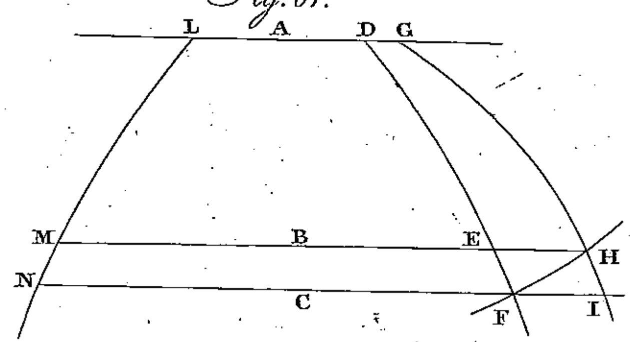


Fig. 60.